Nivel Menor (Solucionario)

Segunda fecha

4 de noviembre de 2023

Problema 1. *Encuentre el mayor número formado por los dígitos del* 1 *al* 9*, sin repetición, que es divisible por* 18

Problema 2. *Muestre que no existen cinco enteros consecutivos cuya suma de cuadrados sea a su vez un cuadrado*

Problema 3. *Muestre que para todo entero* $n \geq 1$ *es posible escribir* 5^n *como la suma de dos cuadrados no nulos*

Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

La suma de los dígitos es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 = 9 \cdot 5$$

por lo cual el número siempre es divisible por 9. Para que sea divisible por 2 necesitamos que su último dígito sea par, si queremos maximizar el número pondremos el 2 como último dígito. Por lo tanto, nuestro número es

$$987654312 = 18 \cdot 54869684$$

Problema 2

Solución 1. Sean $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ los números, notemos que

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5x^2 + 10 = 5(x^2+2)$$

si esto es un cuadrado, necesariamente tenemos que tener $5 \mid x^2 + 2$, sin embargo, si escribimos $x = 5k + r$ con $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tenemos

$$(5k+r)^2 + 2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2 + 2$$

por lo que $5 \mid r^2 + 2$, pero esto no sucede para ningún $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\square$

Solución 2. Notemos que

$$a^2 \equiv \begin{cases} 0 \mod 4 & \text{si } a \text{ es par} \\ 1 \mod 4 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

como son números consecutivos hay o bien 2 pares y 3 impares; o 3 pares y 2 impares. En el primer caso la suma de los cuadrados es $3 \mod 4$ y en el segundo $2 \mod 4$ ninguno de los cuales es residuo cuadrático módulo 4

$\square$

Problema 3

Solución 1. Procederemos por inducción. Notemos que

$$5^1 = 1^2 + 2^2$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Luego supongamos que $5^k = a^2 + b^2$, entonces,

$$5^{k+2} = 5^k \cdot 5^2 = (a^2 + b^2)5^2 = (5a)^2 + (5b)^2$$

lo que completa la inducción $\square$

Solución 2. Procederemos por inducción. Notemos que $5^1 = 1^2 + 2^2$. Luego supongamos que $5^k = a^2 + b^2$, entonces, por la identidad de Brahmagupta se tiene

$$5^{k+1} = 5^k \cdot 5 = (a^2 + b^2)(1^2 + 2^2) = (a \cdot 1 + b \cdot 2)^2 + (a \cdot 2 - b \cdot 1)^2 = (a + 2b)^2 + (2a - b)^2$$

lo que completa la inducción $\square$

Solución 3. Por el teorema de navidad de Fermat, un número es suma de cuadrados si y sólo si todos sus primos congruentes a 3 módulo 4 están elevados a una potencia par. Como 5^n no tiene primos congruentes a 3 módulo 4 debe ser suma de cuadrados. $\square$