Nivel Menor

Primera fecha

28 de octubre de 2023

Problema 1. *En el cuadrilátero convexo* $ABCD$ *se tiene que* $\angle BAD = \angle DCB = 90^\circ$, $AB = 7$, $CD = 11$ *y se sabe que* BC, AD *son enteros mayores a* 11. *Determine los valores de* BC *y* AD

Problema 2. *Encuentre todos los pares de enteros* (x, y) *tales que el número*

$$\frac{x^2 + y^2}{xy}$$

es un entero

Problema 3. *Se escriben en una pizarra las letras*

$$\underbrace{TNOTNOTNO \cdots TNOTN}_{2024 \text{ veces}}$$

en cada paso se puede realizar una de las siguientes operaciones:

1. *Tomar dos letras distintas adyacentes y reemplazarlas por dos copias de la que falta*
2. *Tomar tres letras iguales consecutivas y eliminarlas*

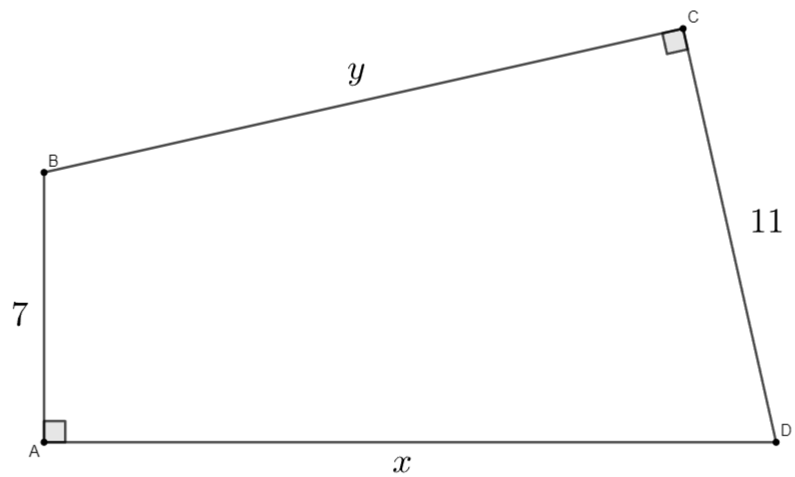
después de cierta cantidad de pasos se llegó a solo dos letras iguales. Determine a que letras es posible llegar

Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

Denotemos por x el largo del lado AD e y el largo del lado BC como se muestra en la figura



por Pitágoras sabemos que

$$7^2 + x^2 = BD^2 = 11^2 + y^2 \implies (x-y)(x+y) = 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

notemos que como $x-y, x+y$ son enteros de la misma paridad y $x-y < x+y$ las uncias posibilidades son

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=6 \\ x+y=12 \end{cases}$$

lo cual nos entrega las soluciones $(x,y) = (19,17), (11,7), (8,4)$ de los cuales solo $(19,17)$ satisface que $x, y > 11$

Problema 2

Sea k un entero tal que
$$\frac{x^2+y^2}{xy}=k$$
en ese caso tenemos
$$x^2-kxy+y^2=0$$
para que esta ecuación tenga un valor entero en x se debe tener que el discriminante, como ecuación cuadrática en x, sea un cuadrado, por lo tanto
$$\Delta_x=k^2y^2-4y^2=y^2(k^2-4)$$
es un cuadrado, lo que implica que k^2-4 es un cuadrado. Pero los únicos cuadrados a distancia 4 son 0^2 y 2^2. Por lo tanto $k=\pm 2$. Si $k=2$ la ecuación se transforma en
$$0=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$
por lo tanto $x=y$. Similarmente, si $k=-2$ se obtiene $x=-y$. Por lo tanto las soluciones son
$$\{(t,t):t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}\cup\{(t,-t):t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$$

Problema 3

Mostraremos que la diferencia entre la cantidad de T's y de N's módulo 3 es invariante. Si realizamos una operación del tipo (1) tenemos tres casos, si las letras involucradas era T,O, T,N o N,O. En el primer caso disminuimos una T y aumentamos dos N's por lo que la diferencia en las cantidades cambió en $3\equiv 0 \pmod 3$, en el tercer caso sucede algo análogo y en el segundo caso disminuimos la cantidad de $T's$ y de $N's$ en uno, por lo que la diferencia se mantuvo constante.

Si por otro lado realizamos un movimiento del tipo (2), la diferencia o se mantiene constante, si la letra que eliminamos era O, o cambia en 3, si la letra que eliminamos era T ó N. Por lo tanto, la diferencia módulo 3 es efectivamente un invariante, como al inicio teníamos
$$|\#T-\#N|=0$$
en el último paso $\#T\equiv\#N \pmod 3$, pero como solo hay dos letras iguales, esto implica que esta letra debe ser O.