Nivel Menor

Primera fecha

5 de noviembre de 2022

Problema 1. *Encuentre todos los enteros* $1 \leq n \leq 95$ *tales que el último dígito de* n^{20} *sea* 1.

Problema 2. *Cada punto del plano se pinta o bien de negro o bien de blanco. Muestre que sin importar como se coloreó el plano, siempre hay al menos un triángulo equilátero cuyos vértices son todos del mismo color.*

Problema 3. *En una mesa hay un montón con* 2022 *dulces. Un paso consiste en escoger uno de los montones con al menos* 3 *dulces que en ese momento haya en la mesa (en el primer paso solo hay uno para escoger), comerse uno de los dulces, y dividir los dulces restantes de ese montón en dos montones no necesariamente iguales. Determine si es posible que después de cierta cantidad de pasos, en la mesa sólo hayan montones de* 3 *dulces.*

Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

Solución 1

Notemos primero que si un número es par o múltiplo de 5, al elevarlo a cualquier potencia sigue terminando en par o 5, por lo tanto basta revisar los números que terminen en $1, 3, 7, 9$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
1^4 &= 1\\
3^4 &= 81\\
7^4 &= 2401\\
9^4 &= 6561
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier número que termine con $1, 3, 7$ ó 9 elevado a 4 termina en 1. Luego, si ahora elevamos a la 5, va a seguir terminando en 1. Por lo tanto, todos los números que terminen en $1, 3, 7$ ó 9 lo satisfacen. Luego, del 1 al 90 hay $\frac{4}{10} \cdot 90 = 36$ de estos números. Luego, de entre el $91, 92, 93, 94, 95$ hay dos de ellos. Por lo tanto en total hay 38 números con esta propiedad.

Solución 2

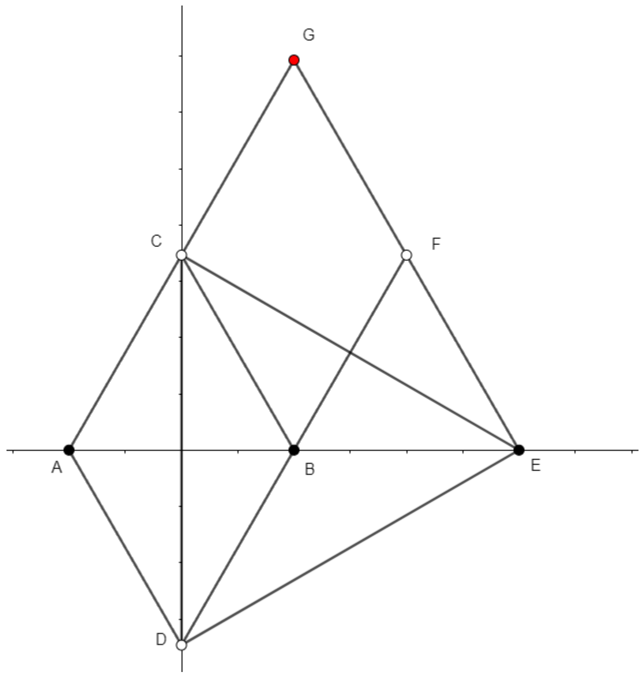
Notemos que si n^{20} sea congruente a 1 módulo 10, entonces $(n, 10) = 1$. Luego, para los coprimos con 10 se tiene por Euler

$$n^{\varphi(10)} \equiv 1 \pmod{10} \iff n^4 \equiv 1 \pmod{10} \implies n^{20} \equiv \left(n^4\right)^5 \equiv 1 \pmod{10}$$

Luego, todos los coprimos con 10 satisfacen, y sólo los coprimos con 10. Como estos son $\varphi(10)/10 = 2/5$ del total de números, hay en total $\left\lfloor \dfrac{2}{5} \cdot 95 \right\rfloor = 38$ números coprimos con 10 menores o iguales a 95

Problema 2

Supongamos por contradicción que hay algún coloreamiento tal que no se forma ningún triángulo equilátero con todos sus vértices del mismo color. Luego, tomemos dos puntos que sean del mismo color, digamos ambos son negros. Sin pérdida de generalidad supondremos que estos puntos son $A = (-1, 0)$ y $B = (1, 0)$. Luego, denotamos $C = (0, \sqrt{3})$, $D = (0, -\sqrt{3})$, $E = (2, 0)$, $F = (1, \sqrt{3})$, $G = (1, 2\sqrt{3})$ como en la figura



Luego, es claro que C debe ser blanco, ya que de otra forma $\triangle ABC$ sería equilátero con todos sus vértices negros, el mismo razonamiento muestra que D debe ser blanco. Luego, E debe ser negro, ya que de otra forma $\triangle CDE$ sería equilátero con todos sus vértices blancos. Luego, F debe ser blanco, ya que de otra forma $\triangle BEF$ sería equilátero con todos sus vértices negros. Luego, notemos que si G es blanco, entonces el $\triangle CFG$ es equilátero con todos sus vértices blancos. Por otro lado, si G es negro, entonces el $\triangle AEG$ es equilátero de todos sus vértices negros. Por lo tanto, es imposible pintar el plano de tal forma que no se formen triángulos equiláteros con todos sus vértices del mismo color

Problema 3

Notemos que en cada paso la cantidad de montones aumenta en 1 mientras que la cantidad de dulces disminuye en 1. Por lo tanto, si consideramos la suma de la cantidad de montones con la cantidad de dulces esta cantidad debe mantenerse constante. Luego, como al principio había un solo montón con 2022 dulces, entonces esta cantidad, que no cambia, vale decir $1 + 2022 = 2023$. Luego, supongamos que después de cierta cantidad de pasos se tuvieran k montones cada uno con 3 dulces. Entonces la cantidad de pilas más la cantidad de dulces valdría $k + 3k = 4k$, pero como esta suma no varía, se debe tener $4k = 2023$, pero no hay ningún k entero que satisfaga esto; por lo tanto es imposible llevarlo a una situación en la que solo hayan montones de a 3 dulces