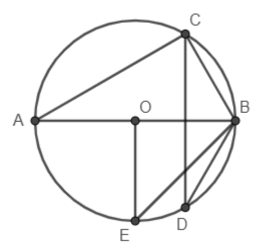
Nivel Menor

Segunda fecha

19 de noviembre de 2022

Problema 1. *En la siguiente figura, O es centro de la circunferencia, AB es perpendicular a OE y a CD. Suponga que $\angle EBD = 15°$. Calcule el valor de $\angle BAC$*



Problema 2. *Se tiene una lista con todos los números enteros del 1 al 50, ambos incluidos. Determine la menor cantidad de números de la lista que deben ser removidos para que la suma de cualesquiera dos números de la lista resultante no sea un número primo*

Problema 3. *Ana y Beto juegan el siguiente juego. Primero Ana escribe los números del 1 al n, donde $n > 1$ es un entero fijo. En cada turno, el jugador debe escribir una lista de números que no haya sido escrita antes tal que se cumpla una de las siguientes condiciones*

1. *La lista se obtiene de escribir los números de la última lista escrita en otro orden*
2. *La lista se obtiene de eliminar un número de la lista anterior*

Gana quien borre el último número de la lista. Determine que jugador tiene una estrategia ganadora

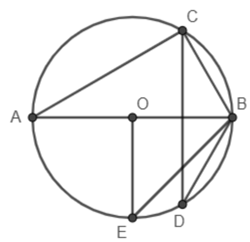
Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

Notemos que $\triangle BEO$ es rectángulo isósceles; ya que $OB = OE$ al ser radios. Por lo tanto, $\angle OBE = 45°$, por lo que $\angle OBD = 60°$. Pero notemos que $\angle OBD = \angle CBO$ por simetría (alternativamente se puede ver criterio LAL en los dos triángulos rectángulos). Además, $\angle ACB = 90°$, ya que AB es diámetro. Luego, viendo el $\triangle ABC$,

$$\angle BAC = 180° - \angle ACB - \angle CBA = 180° - 90° - 60° = 30°$$



Problema 2

Notemos que si se retiran todos los impares, entonces la suma de cualesquiera dos es un número par mayor a 2 y por lo tanto no es primo. Por lo tanto la mínima cantidad es menor o igual a 25. Por otro lado, supongamos bastara con retirar 24 números. Mostraremos que si se dejan 26 números entonces por fuerza deben haber dos que sumen a un primo. Consideremos los 25 conjuntos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 46\} \\
A_2 &= \{2, 45\} \\
A_3 &= \{3, 44\} \\
&\vdots \\
A_{23} &= \{23, 24\} \\
A_{24} &= \{47, 50\} \\
A_{25} &= \{48, 49\}
\end{aligned}$$

la cual es una división de los números entre 1 y 50 en 25 conjuntos. Como se dejaron 26 números, deben haber dos que estén en el mismo conjunto. Si estos dos están en alguno de los $A_1, \cdots, A_{23}$ entonces suman 47 el cual es primo, y si están en A_{24} o A_{25}, entonces suman 97 que es primo. Por lo tanto, se tienen que remover al menos 25 números. Por lo tanto el mínimo es exactamente 25.

Problema 3

Mostraremos por inducción que para cada $n \geq 2$, Beto tiene la estrategia ganadora. Notemos que si $n = 2$, Beto puede permutar los números. Como solo hay dos permutaciones posibles con $n = 2$, Ana se ve obligada a borrar un número. Luego, basta con que Beto elimine el último número que queda para ganar. Luego, supongamos que para cierto $n = k$ Beto tiene la estrategia ganadora. Luego, para $n = k + 1$; si Beto logra que Ana borre un número, entonces se encontraría Beto en una situación equivalente a $n = k$, por lo tanto tendría estrategia ganadora. Notemos que Beto puede forzar a Ana a borrar un número, esto ya que si Ana decidiera solo permutar, como hay $n!$ permutaciones, y $n!$ es par para $n > 1$, esto implicaría que Beto escribiría la última permutación válida; obligando a Ana a borrar un número. Por lo tanto para $n = k + 1$, Beto tiene la estrategia ganadora lo que completa la inducción. Por lo tanto Beto tiene la estrategia ganadora para cada $n > 1$.

Notemos que este razonamiento además nos muestra cual es la estrategia ganadora; la cual es permutar siempre que pueda, y cuando no pueda, que será solo el último paso, borrar el último número y por lo tanto ganar