Nivel Mayor (Solucionario)

Segunda fecha

4 de noviembre de 2023

Problema 1. *En un país hay n ciudades, cada par de ciudades está unida o bien por una carretera pavimentada; o bien por una carretera de ripio. Se sabe que existe un par de ciudades tal que no se puede llegar de la una a la otra usando únicamente carreteras pavimentadas. Muestre que entonces se puede viajar desde cualquier ciudad a cualquier otra usando únicamente carreteras de ripio.*

Problema 2. *Encuentre todos las ternas de enteros (x, y, z) tales que*

$$x - yz = 11$$
$$xz + y = 13$$

Problema 3. *Se pintan los puntos del interior de una circunferencia Γ con $n \geq 1$ colores. Decimos que un color es denso en una circunferencia Ω si toda circunferencia contenida en Ω tiene puntos de ese color en su interior. Demuestre que existe algún color que es denso en alguna circunferencia contenida en Γ*

Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

Consideremos dos ciudades arbitrarias A y B. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de ciudades a las que se puede llegar desde A a través de caminos pavimentados, similarmente, sea $\mathcal{B}$ el conjunto de ciudades a las que se puede llegar desde B a través de caminos pavimentados. Notemos que o bien $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ó $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ entonces, debe haber una ciudad C tal que $C \notin \mathcal{A}$, ya que de lo contrario se podría llegar de cualquier ciudad a cualquier otra a través de caminos pavimentados. Luego, C está conectada tanto a A como a B por caminos de ripio; ya que de lo contrario se podría llegar directamente por un camino pavimentado. Luego, el camino $A \to C \to B$ una a A y a B por carreteras de ripio. Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ entonces no se puede llegar de A a B a través de carreteras pavimentadas, por lo tanto están unidos por una carretera de ripio, en ese caso $A \to B$ es un camino a través de carreteras de ripio

Problema 2

Elevando al cuadrado ambas igualdades y luego sumando se obtiene $(x^2 + y^2)(z^2 + 1) = 290$. Se puede descomponer como $290 = 2 \cdot 5 \cdot 29$, entonces las opciones son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + 1 = 290 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 290 \\ z^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + 1 = 145 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 145 \\ z^2 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z^2 + 1 = 58 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ z^2 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ z^2 + 1 = 29 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ z^2 + 1 = 10 \end{cases}$$

En cada caso es simple despejar el z y no hay muchas opciones para x, y. Revisando una por una nos entrega las soluciones

$$\{(11, 13, 0), (-1, 1, -12), (-1, 12, -1), (12, 1, 1), (-3, 7, -2), (5, -2, 3)\}$$

Problema 3

Haremos inducción sobre la cantidad de colores. Si hay un puro color el resultado es trivial, ya que toda circunferencia tiene únicamente puntos de ese color en su interior. Luego, supongamos el resultado es cierto para k colores. Luego, si pintamos Γ con $k + 1$ colores, mostraremos que hay algún color que es denso. Si el color $k + 1$ no es denso, entonces podemos encontrar una circunferencia en su interior que solo contiene los primeros k colores. Luego, podemos aplicar la hipótesis inductiva en esa circunferencia para obtener lo pedido.