Nivel Mayor

Primera fecha

28 de octubre de 2023

Problema 1. *Sea $n \geq 4$ un entero. Muestre que en una fiesta de n personas puede suceder que cada persona saludó a exactamente tres personas si y sólo si n es par*

Problema 2. *Encuentre todos los enteros $n > 1$ tales que todos los divisores primos de $n^6 - 1$ dividen a $(n^2 - 1)(n^3 - 1)$.*

Problema 3. *Sea $\triangle ABC$ acutángulo, H su ortocentro y M el punto medio de BC. Sea P el pie de la perpendicular a AM desde H. Demuestre que $AM \cdot MP = BM^2$.*

Tiempo: 3 hrs.

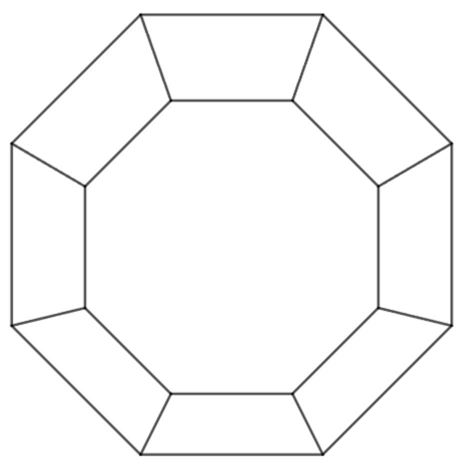
Soluciones

Problema 1

Sea d_i la cantidad de personas que saludó la personas i. Luego, un rápido doble conteo muestra que

$$2\#\text{saludos} = \sum_{i=1}^{n} d_i$$

si cada persona saluda a 3 personas entonces la suma de la derecha es $3n$, por lo tanto, como el lado izquierdo es par se debe tener que n también lo es. Por lo tanto, basta mostrar que si $n \geq 4$ es par entonces se puede organizar de esa forma. Si $n = 4$ entonces podemos organizarlos en un cuadrado de tal forma que todos saluden a todos, si $n \geq 6$ entonces podemos organizarlos en dos polígonos regulares concéntricos como en la figura y que todos saluden a los que están unidos con un segmento



Problema 2

Solución 1. Notar que $n^6 - 1 = (n^3 - 1)(n^3 + 1) = (n^3 - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)$, y también $(n^2 - 1)(n^3 - 1) = (n + 1)(n - 1)(n^3 - 1)$. Entonces los divisores primos de $n^3 - 1$ y $n + 1$ ya satisfacen la condición. Se debe verificar que se cumpla solo para el factor $n^2 - n + 1 = a$.

Luego $\gcd(a, n^3 - 1) \leq \gcd(n^3 + 1, n^3 - 1) \leq (n^3 + 1) - (n^3 - 1) = 2$, ya que $a \mid n^3 + 1$. Pero $a = n(n - 1) + 1$ es siempre impar, por lo que $\gcd(a, n^3 - 1) = 1$ y también $\gcd(a, n - 1) = 1$. Entonces debe tenerse que todos los divisores primos de a dividen a $n + 1$.

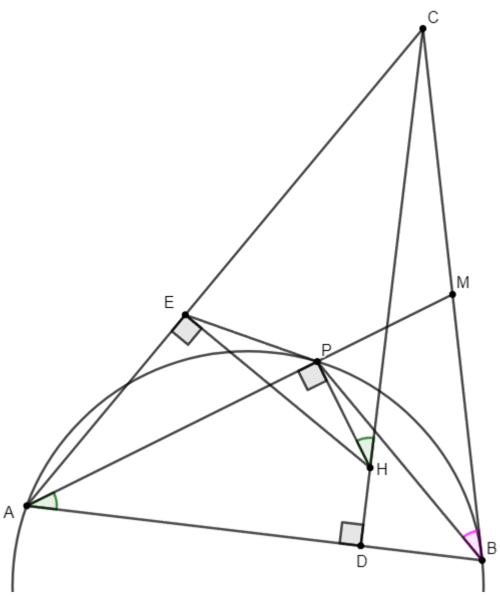
$a = (n+1)(n-2)+3 \Longrightarrow \gcd(a, n+1) \mid 3 \Longrightarrow a = 3^k$. Si $k \geq 2$, tenemos $9 \mid n^2 + n + 1$. No existen valores de n que cumplan esto, por lo tanto, $k = 1$. Luego, la única solución es $n = 2$. $\square$

Solución 2. Por Zsigsmondy, $n^6 - 1$ tiene un divisor primo que no es divisor primo de $n^3 - 1$ ni $n^2 - 1$, a menos que $n = 2$. En este caso, los divisores primos de $2^6 - 1$ son $3, 7$ los que dividen a $(2^3 - 1)(2^2 - 1)$

$\square$

Problema 3

Basta mostrar que BM es tangente a $(\triangle APB)$ ya que tendríamos lo que queremos inmediatamente por potencia de punto de M a $(\triangle APB)$. Por lo tanto hay que demostrar que $\angle PAB = \angle PBC$. Sean D y E los pies de las perpendiculares a AB y CA respectivamente. El polígono $AEHPD$ es cíclico porque $\angle HPA = \angle HEA = 90°$ y $\angle HDA + \angle HPA = 180°$. Entonces, como $APHD$ es cíclico, $\angle PHC = \angle PAB$. Luego, basta mostrar que el cuadrilátero $PHBC$ es cíclico, ya que en ese caso tendríamos $\angle PHC = \angle PBC$ y juntándolo con la igualdad anterior obtendríamos $\angle PAB = \angle PBC$ como queremos.



Por el cíclico $AEHPD$, $\angle PAH = \angle PDH = x$. Como H es ortocentro, tenemos, $\angle ABH = \angle HCA = \alpha$, $\angle HAB = \angle BCH = \beta$, $\angle CAH = \angle HBC = \gamma$. Se cumple que $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Luego, viendo el $\triangle AEM$ se tiene que

$$\angle AME = 180° - \angle EAM - \angle MEA = 180° - \gamma + x - 90° - x - \angle MEP = \alpha + \beta - \angle MEP$$

Notemos que $\triangle EMC$ es isósceles, ya que M es circuncentro de $\triangle BEC$, por lo tanto, $\angle CEM = \alpha + \beta$ y $\angle EMC = 2\gamma$. Luego

$$\angle PMC + \angle CEP = \angle PME + \angle EMC + \angle MEP + \angle CEM = \alpha + \beta - \angle MEP + 2\gamma + \angle MEP + \alpha + \beta = 180°$$

Entonces el cuadrilátero $EPMC$ es cíclico y análogamente el cuadrilátero $PDBM$. Se tiene que

$$\angle CPB = \angle CPM + \angle MPB = \angle CEM + \angle MDB = \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ - \angle CAB$$

mientras que

$$\angle CHB = 180^\circ - \angle BCH - \angle HBC = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - \angle CAB \Longrightarrow \angle CPB = \angle CHB$$

por lo que el cuadrilátero $PHBC$ es cíclico y se concluye la igualdad buscada.