Nivel Mayor

Primera fecha

5 de noviembre de 2022

Problema 1. *En una mesa hay un montón con* 2022 *dulces. Un paso consiste en escoger uno de los montones con al menos* 3 *dulces que en ese momento haya en la mesa (en el primer paso solo hay uno para escoger), comerse uno de los dulces, y dividir los dulces restantes de ese montón en dos montones no necesariamente iguales. Determine si es posible que después de cierta cantidad de pasos, en la mesa sólo hayan montones de* 3 *dulces.*

Problema 2. *Encuentre todos los números reales* x *tales que*

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0$$

Problema 3. *Muestre que para todo número entero* $n \geq 0$ *se tiene*

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \right\rfloor$$

Recordatorio: *Dado un número real* x, $\lfloor x \rfloor$ *es el mayor entero que es menor o igual a* x*. Vale decir, si* $\lfloor x \rfloor = k$*, entonces* k *es el entero tal que* $k \leq x < k+1$

Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

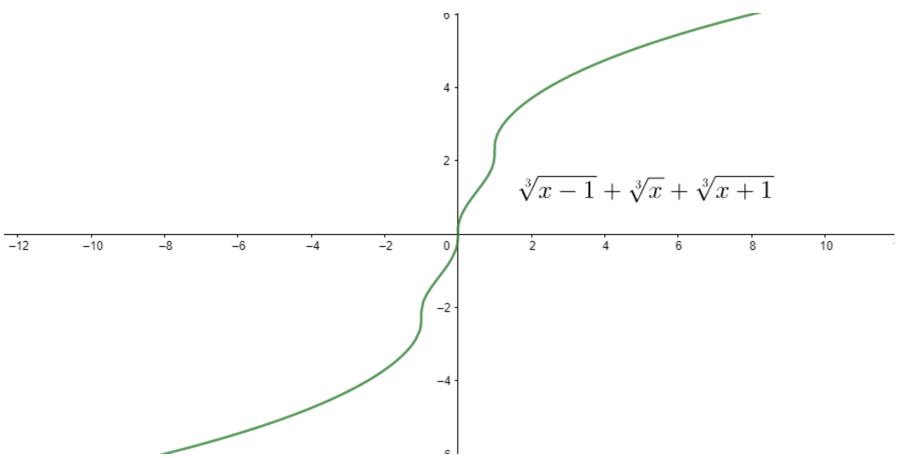
Problema 1

Notemos que en cada paso la cantidad de montones aumenta en 1 mientras que la cantidad de dulces disminuye en 1. Por lo tanto, si consideramos la suma de la cantidad de montones con la cantidad de dulces esta cantidad debe mantenerse constante. Luego, como al principio había un solo montón con 2022 dulces, entonces esta cantidad, que no cambia, vale decir $1 + 2022 = 2023$. Luego, supongamos que después de cierta cantidad de pasos se tuvieran k montones cada uno con 3 dulces. Entonces la cantidad de pilas más la cantidad de dulces valdría $k+3k = 4k$, pero como esta suma no varía, se debe tener $4k = 2023$, pero no hay ningún k entero que satisfaga esto; por lo tanto es imposible llevarlo a una situación en la que solo hayan montones de a 3 dulces

Problema 2

Solución 1

Notemos que el lado izquierdo de la igualdad es estrictamente creciente, vale decir, si $x > y$ entonces $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} > \sqrt[3]{y-1} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y+1}$, esto es ya que $\sqrt[3]{x}$ es estrictamente creciente, y por lo tanto los tres sumandos son estrictamente crecientes. Luego, notemos que $x = 0$ satisface la ecuación. Pero como el lado izquierdo es estrictamente creciente, entonces puede valer 0 en a lo más un valor, por lo tanto esta es la única solución



Solución 2

Recordemos la factorización de Gauss

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

Por lo tanto, si tomamos $a = \sqrt[3]{x-1}$, $b = \sqrt[3]{x}$, $c = \sqrt[3]{x+1}$ y multiplicamos a ambos lados por $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ se obtiene

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) &= 0 \cdot (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \\
a^3+b^3+c^3-3abc &= 0 \\
x-1+x+x+1-3\sqrt[3]{x(x-1)(x+1)} &= 0 \\
x &= \sqrt[3]{x(x-1)(x+1)} \\
x^3 &= x^3 - x \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x = 0$ es la única solución

Problema 3

Denotaremos $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Luego, por definición de función piso se tiene

$$k \le \sqrt{n} < k+1 \implies k^2 \le n < (k+1)^2 \implies k^2 \le n \le (k+1)^2 - 1$$

Dónde la última implicancia se sigue de que tanto n como k son enteros. Luego, racionalizando la expresión de la izquierda se obtiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} &= \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}
\end{aligned}$$

Pero notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2} &> \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{2} \\
&> \sqrt{n} \\
&\ge k
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$k < \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}$$

Por otro lado, como $n \leq (k+1)^2 - 1$ se tiene

$$\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2} \leq \frac{\sqrt{(k+1)^2+1}+\sqrt{(k+1)^2-1}}{2}$$

Luego, hay múltiples formas de concluir que la mano derecha es menor a $k+1$, pero en particular, ocupando la desigualdad de la media aritmética y la media cuadrática se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(k+1)^2+1}+\sqrt{(k+1)^2-1}}{2} &\leq \sqrt{\frac{(\sqrt{(k+1)^2+1})^2+(\sqrt{(k+1)^2-1})^2}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{(k+1)^2+1+(k+1)^2-1}{2}} \\
&\leq \sqrt{(k+1)^2} = k+1
\end{aligned}$$

Pero la igualdad se alcanza cuando los sumandos son iguales, vale decir $\sqrt{(k+1)^2+1} = \sqrt{(k+1)^2-1}$ pero esto evidentemente nunca sucede, por cual la desigualdad es estricta. Juntando todo se tiene

$$k < \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2} < k+1$$

Pero recordemos que

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}$$

Por lo tanto

$$k < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} < k+1$$

Pero como k es entero, esto implica por definición que

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} \right\rfloor = k$$

Pero como $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ se obtiene lo pedido