Nivel Mayor

Segunda fecha

19 de noviembre de 2022

Problema 1. *Se tienen puntos* A, B, C, D *en ese orden en una circunferencia. Se trazan circunferencias* C_1, C_2, C_3, C_4 *tales que* C_1 *pase por* A *y* B, C_2 *por* B *y* C, C_3 *por* C *y* D *y* C_4 *por* A *y* D. *Suponga además que* C_1 *y* C_4 *se intersectan en un segundo punto* A', C_1 *y* C_2 *en un segundo punto* B', C_2 *y* C_3 *en un segundo punto* C' *y* C_3 *y* C_4 *en un segundo punto* D'. *Muestre que existe una circunferencia que pasa por* A', B', C' *y* D'

Problema 2. *Se dispone un tablero de* 1×2022 *compuesto por* 2022 *casillas cuadradas alineadas. Se juega el siguiente juego por turnos de dos jugadores. El o la jugadora en turno debe elegir una casilla vacía y poner alguna de las letras '*T*', '*N*' u '*O*' en ella. Gana la primera persona que, con la letra que puso y usando tres casillas consecutivas, forme una palabra que tenga sus tres letras diferentes. Si nunca se forma ninguna palabra con sus tres letras diferentes, entonces el juego termina en empate. Demuestre que el segundo jugador tiene estrategia ganadora.*

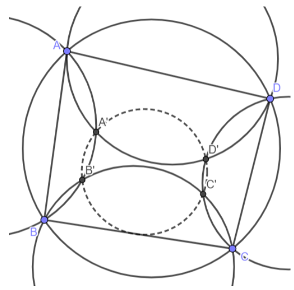
Problema 3. *Dentro de un cubo de lado* 9 *hay* 2022 *puntos distintos. Muestre que hay dos de estos puntos a distancia menor a* 1

Tiempo: 3 hrs.

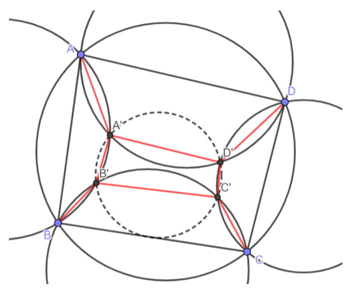
Soluciones

Problema 1

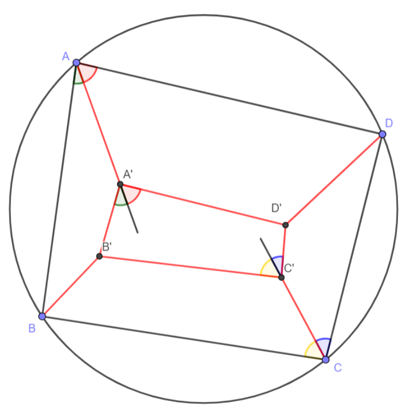
El dibujo luce algo así



Notemos que por hipótesis los cuadriláteros $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$ y $DD'A'A$ son cíclicos. Son los cuadriláteros rojos en el siguiente dibujo



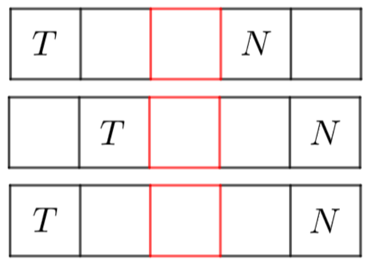
Borramos las circunferencias para facilitar el dibujo, y notamos que como los cuadriláteros mencionados anteriormente son cíclicos, se tienen las igualdades de ángulos destacadas



Por lo tanto, $\angle BAD = \angle B'A'D'$ y $\angle DCB = \angle D'C'B'$. Como $ABCD$ es cíclico, $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$, por lo tanto $\angle B'A'D' + \angle D'C'B' = 180^\circ$, por lo que $A'B'C'D'$ es cíclico como queríamos

Problema 2

Diremos que una casilla es *perdedora* si al poner cualquier letra en ella, el otro jugador tiene una forma de ganar en el turno siguiente. Si el primer jugador pone una letra en una casilla perdedora, entonces el segundo jugador puede ganar inmediatamente, y hará esto. Notemos que si una casilla es perdedora, entonces si se juega en ella, la palabra que se forme en el siguiente turno debe involucrar a esta casilla; de otra forma; el juego habría terminado antes. Por lo tanto, consideremos dos casillas a la izquierda y dos a la derecha de una casilla perdedora, las situaciones posibles son las siguientes 3



Mostraremos que el segundo jugador puede jugar de tal forma que siempre tenga una casilla no perdedora disponible. Para esto, mostraremos que el jugador dos siempre puede dejarle una cantidad par de casillas válidas al primer jugador. Notemos que cada paso remueve una cantidad impar de casillas válidas. Puede ser solo en la que pone su letra, o ser alguno de los casos de arriba. Si es el caso 1 o el 2, se remueve la casilla en la que se puso la letra, más las dos de entre medio. Por otro lado, si bien en el caso 3 se remueve una cantidad par de casillas, en realidad, las dos del centro que no son perdedoras se comportan como una única casilla válida; ya que una vez se utilice una de estas, la otra queda como perdedora del caso 1 o 2, por lo que solo una de estas es potencialmente válida. Por lo tanto, después de cada paso se quita una cantidad impar de casillas válidas; por lo tanto, el segundo jugador siempre tiene una cantidad impar de casillas válidas, por lo tanto siempre tiene al menos una casilla válida. Por lo tanto, el segundo jugador puede no perder. Luego, para mostrar que gana, basta generar al menos una casilla perdedora, ya que esta se tiene que llenar eventualmente; a menos que el juego acabe antes que como vimos implica que el segundo gane. Luego, después del primer movimiento, sin importar donde se puso la letra; en alguna dirección habrán al menos 3 casillas, luego, basta poner una letra distinta en esta tercera casilla para caer en la situación 1 o 2 y por lo tanto generar una casilla perdedora. Así, el segundo jugador tiene estrategia ganadora

Problema 3

Supongamos que se pudieran poner 2022 puntos en un cubo de lado 9, en ese caso, podríamos centrar esferas de radio $1/2$ de interiores disjuntos en cada uno de los puntos. Estas esferas deben estar contenidas en un cubo más grande de radio 10, ya que a lo más se escapan en $1/2$ en cada dirección del cubo. Por lo tanto, si se pueden meter 2022 puntos a distancia mayor o igual a 1 en un cubo de lado 9, entonces se pueden meter 2022 esferas de radio $1/2$ de interiores disjuntos en un cubo de lado 10.

Si esto sucede, el volumen del cubo debe ser al menos tan grande como el volumen de las 2022 esferas. En particular se debe tener

$$10^3 > \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2022 = 337\pi > 337 \cdot 3 = 1011$$

Pero, $10^3 = 1000 < 1011$. Por lo tanto no pueden meterse 2022 esferas de radio $1/2$ de interiores disjuntos en un cubo de lado 10; y por lo tanto, no se pueden tener 2022 puntos distintos en un cubo de lado 9 tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos sea al menos 1.