Nivel Menor

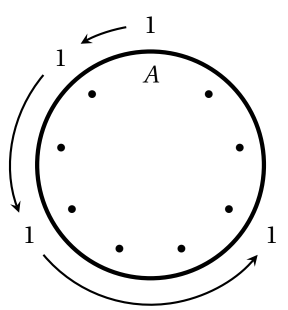
Primera fecha

30 de agosto 2025

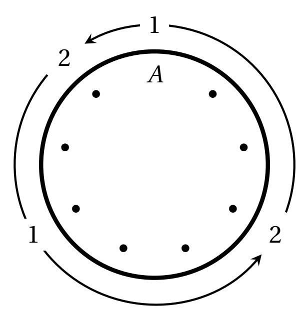
Problema 1. *El rey Arturo disfruta jugar con su dinero en su mesa redonda de 9 puestos. Para esto, hace el siguiente ritual: trae un baúl lleno con monedas de oro, pone una moneda en su puesto, luego, se va un puesto a su derecha y pone una moneda ahí, luego, avanza otros 2 puestos a su derecha, y pone una moneda ahí, luego, avanza otros 3 puestos a su derecha, y pone una moneda ahí, y así, cada vez avanza un puesto más que la vez anterior y pone una moneda, hasta que se acaban las monedas del baúl.*

Un día, el rey Arturo invita a cuatro de sus "amigos", a quienes convence de venir al ofrecerles dinero. Les pide que elijan algún puesto vacío en su mesa redonda, y luego procede a hacer su ritual con un baúl con 2025 monedas. ¿Es posible determinar cuántas monedas más se entregó a si mismo el rey Arturo con respecto al amigo que se llevó menos monedas?

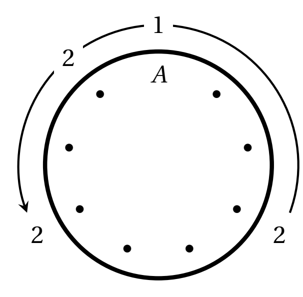
Solución. Si vemos el recorrido del ritual para las primeras 9 monedas, ocurre lo siguiente:



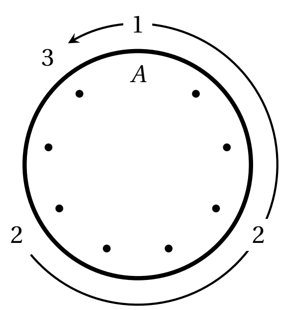
Primeras 4 monedas entregadas



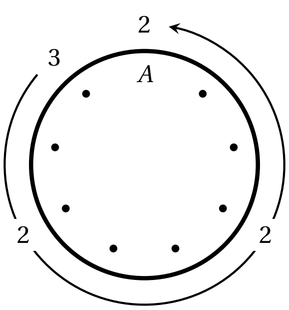
Primeras 6 monedas entregadas



Primeras 7 monedas entregadas

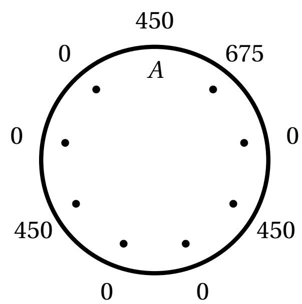


Primeras 8 monedas entregadas



Primeras 9 monedas entregadas

Ahora, cuando el rey entregue la décima moneda, esta será al avanzar 9 puestos, llegando nuevamente a su puesto. Luego, la siguiente moneda avanzará 10 puestos, es decir, dará una vuelta entera y avanzará un puesto más. Esto es cierto en realidad para cualquier cantidad de monedas; notemos que si estamos entregando la moneda $(9k+r)$-ésima, daremos k vueltas y finalmente avanzaremos $r-1$ puestos. En otras palabras, avanzaremos en un ciclo de 9 en 9, en donde cada ciclo le entrega 3 monedas a quien se haya sentado un puesto a la derecha del rey Arturo, y 2 monedas al mismísimo rey Arturo y a los que están tres y seis puestos a su derecha. Así, luego de repartir 2025 monedas, que son $225 \cdot 9$ monedas, deducimos que se repartieron las monedas de la siguiente manera.



2025 monedas entregadas

Por último, notamos que como el rey Arturo invitó a 4 “amigos”, necesariamente al menos uno de ellos debió quedarse en los puestos en los que no se les asignaron monedas, por tanto, sabemos de forma segura que el rey Arturo se llevó 450 monedas más que su “amigo” que se llevó menos monedas (cero).

■

Problema 2. *Amanda y Juan se disponen a jugar el siguiente juego en un tablero de* 3×3. *Primero, Amanda rellena cada una de las casillas de un tablero con una letra, la cual puede ser una* T, *una* N, *o bien una* O. *Luego de rellenado el tablero por Amanda, Juan elige una fila y una columna del tablero, y borra todas las letras que estén sobre ellas. Gana Amanda si entre las letras restantes queda al menos una letra de cada tipo (una* T, *una* N *y una* O*), y gana Juan si logra impedir que esto suceda. Muestre que es posible para Amanda ganar sin importar que fila y columna borre Juan.*

Solución. Notemos que gana Juan si logra hacer que una de las letras no aparezca más en el tablero; así, si una letra aparece dos o menos veces, Juan gana borrando esas letras, una de ellas borrando su columna, y la otra, si es que queda otra letra, borrando su fila.

Por tanto, para que Juan no gane, cada letra debe aparecer al menos 3 veces. Como son solo 9 casillas, tenemos que en realidad cada letra aparece exactamente 3 veces.

Notemos ahora que no pueden haber dos de la misma letra en una misma fila o columna; en caso contrario, Juan puede borrar dicha fila o columna, dejando una sola letra que puede borrar con su siguiente movimiento.

Por tanto, necesitamos que cada letra aparezca exactamente una vez en cada fila y columna.

Así, una posible solución es la siguiente.

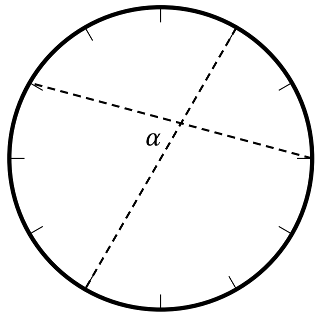
T	N	O
N	O	T
O	T	N

Notamos que funciona, pues, sin importar que fila se borre, cada tipo de letra aparecerá en dos columnas distintas entre las casillas restantes, resultando en que todas aparecerán al final.

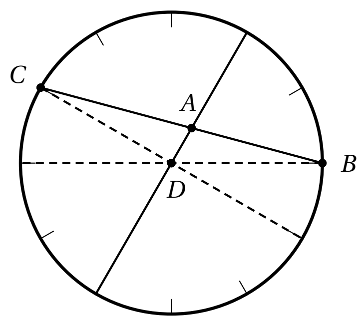
■

Problema 3. *El abuelo de Edgardo está haciendo un reloj analógico de madera. Para esto, parte tallando un circulo de madera, y marca, en el borde, doce puntos equidistantes, en los cuales se anotarán los números del 1 al 12 de forma consecutiva, uno tras otro. Si se unen los puntos 1 y 7 con una línea, y los puntos 3 y 10, con otra línea ¿qué medida tienen los ángulos que se forman en la intersección de estas líneas?*

Solución. Primero, siguiendo las indicaciones del enunciado, nuestro objetivo es calcular α.



Notemos que trazando la línea que une a los puntos con los números 3 y 9, así también como la línea que une 4 y 10; y nombrando algunos puntos, obtenemos los siguientes resultados.



Primero, notemos que α es la suma de las medidas de los ángulos $\angle ABD$ y $\angle BDA$. Podemos notar fácilmente que $\angle BDA$ corresponde a $2 \cdot 360/12 = 60$ grados, mientras que para $\angle ABD$ necesitaremos mirar el triángulo BCD.

Notemos ahora que BCD es isósceles y que el ángulo en D mide $5 \cdot 360/12 = 150$, luego, como la medida del ángulo en C es la misma que la del ángulo en B, concluimos que $\angle ABD = (180 - 150)/2 = 15$ grados.

Así, obtenemos que α debe medir 75° y su suplemento 105°

■