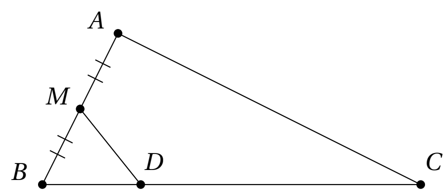
Nivel Mayor (Soluciones)

Primera fecha

30 de agosto 2025

Problema 1.

En la figura, ABC es un triángulo rectángulo en A. M es punto medio, y D en $\overline{BC}$. Si se cumple que $\overline{AB}$ mide $8\,\text{cm}$, $\overline{MD}$ mide $4\,\text{cm}$ y $\overline{DC}$ mide $12\,\text{cm}$, ¿cuál es la medida de $\overline{AC}$?



Solución. Notemos que el triángulo ABD es rectángulo en D, pues está inscrito en la semicircunferencia de centro M y diámetro $\overline{AB}$, esto ya que $\overline{MD}$ mide lo mismo que $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$.

Luego, notamos que AD es altura del triángulo ABC, y tenemos que los triángulos DBA y ABC son semejantes entre ellos. Así, tenemos $BD(BD+12) = 8^2$

Manipulando la expresión anterior, vemos que $BD^2 + 12BD + 36 - 100 = 0$, y a partir de aquí no es difícil ver que $(BD-4)(BD+16) = 0$. Como BD es una medida positiva, entonces debe pasar que $\overline{BD}$ mide $4\,\text{cm}$.

Finalmente, tenemos que $BC = BD + DC = 4 + 12 = 16$, por lo que la medida de $\overline{AC}$ puede ser calculada mediante el teorema de Pitágoras, resultando en $8\sqrt{3}\,\text{cm}$.

■

Problema 2. *Encuentre todos los n enteros positivos mayores, pero no iguales, a 45 tales que*

$$(n-45)!+2025=n^2$$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned}(n-45)! &= n^2-45^2\\ (n-46)!\cdot(n-45) &= (n+45)\cdot(n-45)\\ (n-46)! &= (n+45)\end{aligned}$$

Luego, como $n-46=0$ no es solución, tenemos que $n-46$ es factor de $n+45$, por tanto, $n-46$ también debe ser factor de $n+45-(n-46)=91$, por que $n-46$ solo puede ser 1, 7, 13 o 91.

Mirando la última ecuación que obtuvimos, notemos que 7! tiene al menos tres dígitos, por lo que descartamos de inmediato los casos en los que $n-46$ sea 7, 13 o 91.

Así, nos queda un último caso, $n-46=1$, de donde llegamos a que $n+45=92\neq 1=(n-46)!$, por lo que concluimos que no existen valores de n que satisfagan la ecuación.

$\blacksquare$

Problema 3. *Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos tales que*

a) $f(x,y)=g(x,y)+|x-y|$

b) $f(x,y)+g(x,y)=f(x,x)+g(y,y)$

c) $f(x,0)=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$

Solución. Presentaremos la siguiente cadena de deducciones lógicas.

Primero, notemos que podemos despejar $f(x,y)$ y $g(x,y)$ al juntar a) con b):

$$2f(x,y)=f(x,x)+g(y,y)+|x-y| \quad \text{y} \quad 2g(x,y)=f(x,x)+g(y,y)-|x-y|$$

Ahora, de a), notamos que probando $x=y$, tenemos que $f(x,x)=g(x,x)$.

Por c), tenemos que $f(0,0)=0$, asimismo $g(0,0)=0$.

Usando esto en nuestro resultado de f, y reemplazando $y=0$, tenemos que $2f(x,0)=f(x,x)+0+|x|$, por tanto $f(x,x)=2f(x,0)-|x|$, es decir, resulta que $f(x,x)=x$ sin importar el signo de x.

Así, tenemos que $f(x,y)=(x+y+|x-y|)/2$ y $g(x,y)=(x+y-|x-y|)/2$.

Nota: lo anterior es suficiente, mas para aquellas personas más entusiastas, notarán que $f(x,y)$ resulta ser la función $\max(x,y)$ y $g(x,y)$ la función $\min(x,y)$.

$\blacksquare$