



Nivel Mayor (Soluciones)

Segunda fecha
17 de octubre 2026

Problema 1. Encuentre todas las funciones $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumplen las siguientes condiciones:

- $F(F(x)) = F(x) \cdot x^2$
- $F(xy) = F(x)/y$

Solución. Reemplazando x por 1 en la segunda ecuación, obtenemos que $F(y) = F(1)/y$. De este modo, tenemos que

$$F(F(x)) = F(1)/F(x) = x.$$

Por otro lado, tenemos que

$$F(F(x)) = F(x) \cdot x^2 = F(1) \cdot x.$$

Igualando, tenemos que $F(1) = 1$. Por lo tanto $F(x) = 1/x$.

Solución Alternativa. Tenemos que

$$1 = F(x)/F(x) = F(F(x) \cdot x) = F(F(x))/x = F(x) \cdot x$$

Por lo que $F(x) = 1/x$.

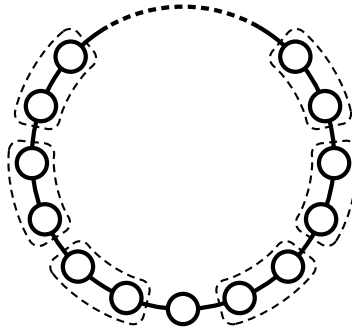
■

Problema 2. En un partido de fútbol se enfrentan Deportes Fibonacci contra los Titanes del Norte Oriental. La primera fila forma un círculo de 2026 personas. Pruebe que si en este círculo hay 1013 fanáticos de Deportes Fibonacci, entonces hay alguien en el círculo que está entre dos de ellos.

Solución. Vamos a colorear los 2026 fanáticos en dos colores de forma intercalada, consiguiendo así 1013 fanáticos de cada color. Por palomar, hay un color A con al menos 507 fanáticos de Deportes Fibonacci y un color B con a lo más 506.

Tomemos el círculo de 2026 fanáticos y quitemos todos los de color B . Ahora tenemos un nuevo círculo de 1013 fanáticos. En este círculo, notemos entonces que si hay dos fanáticos consecutivos de Deportes Fibonacci, entonces se cumple la condición deseada. Por ende, supongamos que no hay dos consecutivos.

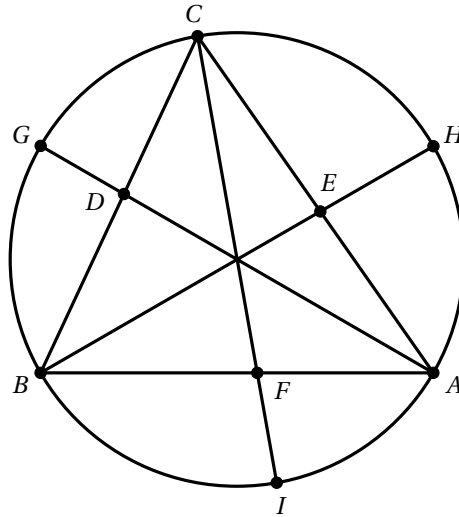
En nuestro círculo de color A miremos a un fanático de Deportes Fibonacci; debe tener un vecino que no es fanático de este equipo, de lo contrario concluimos. Dejando a este no fanático afuera, tenemos 506 parejas de fanáticos de algún equipo.



Como son 507 fanáticos de Deportes Fibonacci en este círculo, por palomar alguna de estas 506 parejas estará conformada por dos fanáticos de Deportes Fibonacci y concluimos. ■

Problema 3. Sea ABC triángulo con bisectrices AD , BE y CF . Sea Γ circunferencia circunscrita de ABC , y sean G , H e I intersecciones de Γ con AD , BE y CF respectivamente. Pruebe que $AB^2 \cdot BC^2 \cdot AC^2 = AD \cdot AG \cdot BE \cdot BH \cdot CF \cdot CI$.

Solución.



Notemos que $\triangle ABE \sim \triangle HBC$, pues $\angle ABH = \angle HBC$ por hipótesis y $\angle CAB = \angle CHB$ pues ambos tienen al arco $\widehat{CB}$ dentro de su apertura.

Por lo tanto, tenemos que $AB : BE = HB : BC$, es decir, $AB \cdot BC = BE \cdot HB$.

Análogamente, podemos notar que $\triangle CAD \sim \triangle GAB$ y que $\triangle BCF \sim \triangle ICA$ y concluir respectivamente que $AC \cdot AB = AD \cdot AG$ y que $BC \cdot AC = CF \cdot CI$. Multiplicando las tres igualdades concluimos lo pedido. ■