



Nivel Mayor (Soluciones)

Primera fecha
26 de septiembre 2026

Problema 1. Encuentre todos los primos p , q y r tales que satisfagan la siguiente ecuación.

$$p^7 + 7q^5 + r = 2026.$$

Solución. Primero, notemos que p no puede ser mayor o igual que 3, pues $3^7 = 2187 > 2026$. Por lo tanto, tenemos que $p = 2$.

Reemplazando p en la ecuación, nos queda que $7q^5 + r = 2026 - 2^7 = 2026 - 128 = 1898$. Notamos que $7 \cdot 2^5 + 2 = 226$, por lo que ambos deben ser impares dado que deben resultar en 1898, un número par. Además, q no puede ser mayor o igual a 5 pues $7 \cdot 5^5 = 21875 > 1898$, por lo que $q = 3$.

Por último, reemplazando q en la ecuación, tenemos que $r = 1898 - 7 \cdot 3^5 = 1898 - 1701 = 197$, lo que verifica ser primo.

Por lo tanto, existe una única solución: $p = 2$, $q = 3$, $r = 197$.

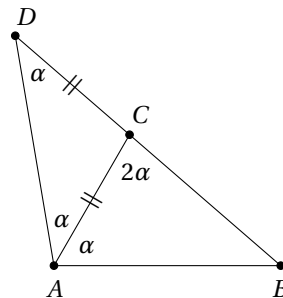
■

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $2\angle BAC = \angle ACB$. Pruebe que $AB^2 = BC(BC + AC)$.

Solución. Primero extendemos $\overline{BC}$ por C hasta un punto D , de modo que $BD = BC + AC$.

Luego, $CD = BD - BC = (BC + AC) - BC = AC$, es decir, $\triangle DCA$ es isósceles.

Notemos que $2\angle CAD = 2\angle ADC = \angle CAD + \angle ADC = \angle DCA = 2\alpha$, por lo que $\angle CAD = \angle ADC = \alpha$.



Por último, notemos que entonces $\triangle DAB \sim \triangle ACB$, por lo que $BD : AB = AB : BC$, en otras palabras, $AB^2 = BC \cdot BD = BC(BC + AC)$, que era lo pedido.

■

Problema 3. En un hipódromo con 81 caballos se quieren encontrar a los cuatro caballos más rápidos. Para esto, se le pide a Sofía que, haciendo 11 carreras de nueve caballos cada una, determine cuáles son. ¿Puede Sofía determinar los cuatro caballos más rápidos bajo estas condiciones?

Indicación: Se puede asumir que si un caballo es más rápido que otro siempre le ganará, y que todos los caballos corren a diferentes velocidades. Además, al finalizar cada carrera, solo se sabe el orden en que cada caballo llegó a la meta.

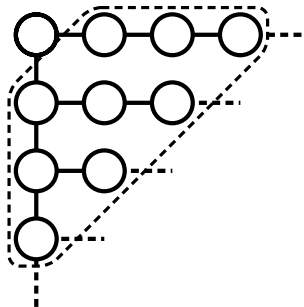
Solución. Sí puede lograrlo. Para ello, una posible estrategia es la siguiente:

Agrupamos los 81 caballos en 9 grupos de 9 caballos. Luego hacemos una carrera por cada grupo donde participen los integrantes de dicho grupo. Una vez hecho esto, nos quedamos con 9 grupos de caballos, en los que en cada grupo sabemos el orden de velocidad de los caballos.

Nos quedan dos carreras. Haremos una carrera con el mejor caballo de cada uno de los 9 grupos. Por transitividad, el ganador de esta carrera es indiscutiblemente el caballo más rápido.

Ahora nos queda resolver cuáles son los otros 3 caballos restantes del top 4 con la carrera que nos resta. Recordemos la carrera de los mejores, esta nos da información de en qué grupos pueden estar los candidatos del top 4:

- Del grupo del caballo más rápido, tomamos los caballos segundo, tercero y cuarto; no nos interesa del quinto en adelante, a todos ellos les ganan el top 4 de su grupo, por lo que no pueden ser del top 4 por transitividad.
- Del grupo del caballo que llegó segundo en la carrera de los mejores, tomamos al mismo caballo que ganó, al caballo que llegó segundo y al que llegó tercero. Del cuarto en adelante no nos importa, pues hay al menos 4 caballos que les ganan; su top 3 y el caballo más rápido, por lo que no pueden ser del top 4 global.
- Del grupo del caballo que llegó tercero en la carrera de los mejores, tomamos al que ganó y al que llegó segundo; similarmente a los casos previos, del tercero en adelante ocurre que ya hay 4 caballos que les ganan, el top 2 de su grupo y el top dos de la carrera de los mejores, por lo que no pueden ser del top 4 global.
- Por último, del grupo del caballo que llegó cuarto en la carrera de los mejores tomamos al mismísimo ganador; nadie más puede ser del top 4 global pues por transitividad el top 4 de los mejores les ganan.
- Por el mismo argumento anterior, ningún otro caballo puede ser parte del top 4 global, pues al menos el top 4 de la carrera de los mejores les ganan.



De este modo, hacemos una carrera con los 9 caballos que tomamos previamente y concluimos cuáles son los 4 mejores.

■