Nivel Menor (Soluciones)

Primera fecha

16 de noviembre de 2024

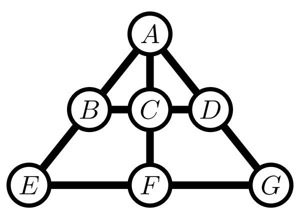
La cisterna

Problema 1. *Helena quiere salir a recorrer el sur de Chile en automóvil, para ello compró 6 neumáticos nuevos, el automóvil funciona con 4, por lo que tiene 2 de repuesto. Cada neumático dura unos 40.000 km. ¿Cuál es la mayor distancia que puede recorrer Helena antes de tener que comprar más neumáticos?*

Solución. Helena puede recorrer 60.000 km antes de tener que comprar más neumáticos, una forma de conseguir esto es recorrer 20.000 km, en este punto reemplaza dos neumáticos cualesquiera por los dos de repuesto, luego recorre 20.000 km más, en este punto los neumáticos que no cambió antes ya cumplieron su vida útil, pero los otros 4 pueden recorrer 20.000 km más, usando esos 4 puede completar los 60.000 km.

■

Problema 2. *Se tiene la siguiente figura, donde cada letra representa un dígito del 1 al 7 distinto.*



Se cumple además que esta figura es un triángulo mágico, esto es: existe un número S, tal que al sumar tres dígitos que pertenezcan a una misma linea (por ejemplo A, B y E), se obtiene como resultado S.

Encuentre todos los valores de A para los cuales es posible rellenar el triángulo mágico.

Solución. Primero, notemos que

$$A + B + C + D + E + F + G = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned}(A + B + E) + (A + C + F) + (A + D + G) &= 3S \\ 2A + 28 &= 3S.\end{aligned}$$

Por otra parte, también tenemos que

$$\begin{aligned}A + (B + C + D) + (E + F + G) &= 28 \\ A + 2S &= 28.\end{aligned}$$

Juntando ambas ecuaciones, por ejemplo, despejando S y obteniendo $3(28-A) = 2(2A+28)$, obtenemos que $A = 4$. Como esta es una condición necesaria, concluimos que A solo puede tomar el valor de 4.

Solución alternativa. Otra posible manera de calcular A es notar que

$$\begin{aligned}(A+B+E)+(A+C+F)+(A+D+G)+(B+C+D)+(E+F+G) &= 5S\\ A+2\cdot 28 &= 5S.\end{aligned}$$

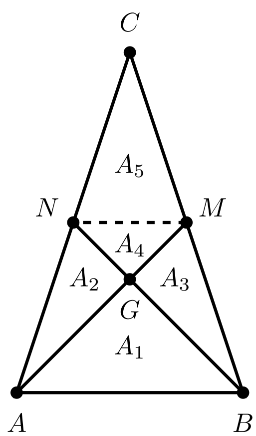
Luego, hay que darse cuenta que para que la ecuación sea verdadera, es necesario que A sea de la forma $5k+4$, pues el lado derecho es un múltiplo de 5 y $2 \cdot 28 = 56 = 5 \cdot 11 + 1$. Con esto, notamos que el único dígito del 1 al 7 que cumple lo anterior es el 4.

■

Problema 3. *En el triángulo ABC, $AB = 5$, y las medianas por A y por B son perpendiculares entre si.*

Si el área del triángulo ABC es 18, ¿cuánto miden AC y BC respectivamente? Entregue todos los posibles valores.

Solución. Sean M y N puntos medios de BC y AC respectivamente. Sea G el baricentro. Sean también A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 las áreas de los subsectores formados en el dibujo mostrado a continuación.



Notemos que se tiene que

$$GM = \frac{1}{2}AG \qquad \text{y} \qquad GN = \frac{1}{2}BG.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{AG \cdot BG}{2}\\ A_2 &= \frac{AG \cdot GN}{2} = \frac{AG \cdot GB}{4}\\ A_3 &= \frac{GM \cdot GB}{2} = \frac{AG \cdot GB}{4}\\ A_4 &= \frac{GM \cdot GN}{2} = \frac{AG \cdot GB}{8}.\end{aligned}$$

Por tanto, notemos que

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{(4+2+2+1)AG \cdot GB}{8} = \frac{9}{8} AG \cdot GB.$$

Pero sabemos que esa área equivale a $\frac{3}{4}$ del área del triángulo ABC

Luego:

$$\frac{9}{8} AG \cdot GB = \frac{3}{4} \cdot 18 \Longrightarrow AG \cdot BG = 12.$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras, $AG^2 + BG^2 = 25$.

Así, tenemos el sistema

$$AG^2 + BG^2 = 25$$
$$AG \cdot BG = 12$$

el cuál tiene como solución $AG = 4, BG = 3$ o $AG = 3, BG = 4$.

Sin perdida de generalidad, elegimos una solución, y con esto ya estamos listos, pues por teorema de Pitágoras.

$$AN = \sqrt{GN^2 + AG^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{2})^2 + 16} = \tfrac{1}{2}\sqrt{73} \Longrightarrow AC = \sqrt{73}$$

y

$$BM = \sqrt{GM^2 + BG^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \Longrightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

Por tanto, se tiene las soluciones de (AC, BC) son $(\sqrt{73}, \sqrt{13})$ y $(\sqrt{13}, \sqrt{73})$.

■