Nivel Menor (Soluciones)

Primera fecha

9 de noviembre de 2024

Problema 1. *Un grupo de 6 estudiantes de matemáticas se hospedan en un hotel matemático para participar en un torneo matemático que se celebraría en aquella ciudad durante los próximos días. Este grupo, compuesto por 3 mujeres y 3 hombres, fue ubicado por la administración del hotel de una forma particular: en habitaciones separadas y de forma intercalada, a saber, mujer, hombre, mujer, hombre, mujer, hombre, ocupando las últimas 6 habitaciones de un pasillo con las habitaciones enumeradas de la 101 hasta la 110.*

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
				M	H	M	H	M	H

En contra de las reglas de la administración, el grupo se ideó el siguiente juego: un intercambio válido de habitaciones es cuando dos estudiantes de habitaciones consecutivas se trasladan a dos habitaciones vacías, de modo que los números de sus nuevas habitaciones se hayan reducido o incrementado la misma cantidad que con respecto a sus habitaciones originales. Por ejemplo, si quienes están en las habitaciones 105 y 106 se trasladan respectivamente a las habitaciones 101 y 102, esto sería un intercambio válido, pues ambos números decrecieron en 4 unidades con respecto a sus habitaciones originales.

Muestre si es posible que, siguiendo estas reglas, los estudiantes puedan lograr que las habitaciones 101, 102, y 103 tengan hombres, y las habitaciones 104, 105 y 106 mujeres, con tan solo 3 intercambios válidos.

Solución. Es posible, una manera es la siguiente:

El primer intercambio válido será trasladar a los estudiantes de las habitaciones 106 y 107 a las habitaciones 103 y 104.

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
		H	M	M			H	M	H

Luego, como segundo intercambio válido, se trasladarán quienes están en las habitaciones 109 y 110 a las habitaciones 106 y 107.

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
		H	M	M	M	H	H		

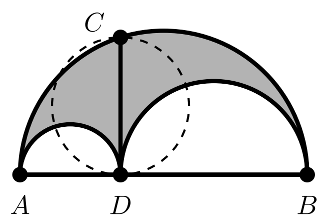
Por último, como ter intercambio válido, se trasladarán los las habitaciones 107 y 108 a las habitaciones 101 y 102.

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
H	H	H	M	M	M				

Y con esto los estudiantes lograron su cometido.

■

Problema 2. *Demuestre que el área encerrada por 3 semicírculos, tangentes en sus extremos, es igual al área del círculo que tiene como diámetro CD, perpendicular al diámetro AB.*



Solución. Sea S el área encerrada. Notemos que

$$S = [\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{AB}{2}\right)^2\pi] - [\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{AD}{2}\right)^2\pi] - [\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{DB}{2}\right)^2\pi]$$
$$S = \frac{\pi}{8}[(AD+BD)^2 - AD^2 - DB^2]$$
$$S = \frac{\pi}{8}(2 \cdot AD \cdot BD)$$
$$S = \frac{\pi}{4}(AD \cdot BD)$$

Por otra parte el área del círculo de diámetro CD es:

$$S_1 = (\tfrac{DC}{2})^2\pi = \tfrac{\pi}{4}DC^2$$

Además, tenemos que ACB es rectángulo, por lo que se cumple que $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \Longrightarrow DC^2 = AD \cdot DB$.

Finalmente, reemplazando, obtenemos que $S_1 = \frac{\pi}{4}(AD \cdot DB) = S$.

■

Problema 3. *Antonia y Benjamín juegan al siguiente juego: Primero Antonia escribe un número entero del 1 al 2024, luego Benjamín escribe un número entero entre 1 y 2024 diferente al que escribió Antonia, luego Antonia escribe un número entero entre 1 y 2024 diferente de los que hayan escrito hasta ahora y se alternan hasta que no queden más números. Cada vez que Antonia escribe un número gana un punto por cada dígito 2 que tenga ese número y pierde un punto por cada dígito 5 que tenga ese número (los puntajes pueden ser negativos), por su parte Benjamín gana un punto por cada dígito 5 que tenga el número que escribe y pierde un punto por cada dígito 2 que tenga dicho número. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar su victoria?*

Solución. En cualquier momento del juego sea A el puntaje de Antonia y sea B el puntaje de Benjamín, consideremos ahora la cantidad $A - B$, si este número es positivo al final gana Antonia, si es negativo gana Benjamín y si es igual a 0 el juego termina en empate.

Analicemos como cambia la cantidad $A - B$ luego de que Antonia escriba un número, como es el turno de Antonia B no cambia, así que el cambio en $A - B$ es aumentar en 1 por cada dígito 2 del número que acaba de escribir Antonia y disminuir en 1 por cada dígito 5. Por otro lado cuando juega Benjamín A no cambia, de modo que el cambio en $A - B$ es igual al cambio en B, pero con los signos intercambiados, es decir, $A - B$ aumenta en 1 por cada dígito 2 que tenga el número y disminuye en 1 por cada 5 que tenga dicho número, esto significa que $A - B$ cambia del mismo modo sin importar qué jugador escriba los números.

Como no importa quién escriba los números, entonces tampoco importa el orden en que se escriban, supondremos que los números se escriben en orden y contamos los puntos de la siguiente manera:

- Entre 1 y 9 hay exactamente un 2 y un 5, así que no aportan puntos a la cuenta en total.
- Entre 10 y 19, es igual que lo anterior, lo mismo aplica para todos los grupos de a 10 menores que 100 que cuya cifra de las decenas no sea ni 2 ni 5.
- Entre 20 y 29 se ganan 10 puntos por los 2 en las decenas y entre 50 y 59 se pierden 10 puntos por los 5 en las decenas.
- Con todo lo anterior, al escribir los números del 1 al 99 la cuenta va en 0 puntos.
- Al escribir los números entre el 100 y el 199 el balance es igual que entre 1 y 99, pues el 1 de las centenas no cambia los puntos asignados, así que en este intervalo también el total es de 0 puntos.
- Lo mismo aplica para todos los grupos de 100 cuya centena no sea ni 2 ni 5.
- Entre 200 y 299 se suman 100 puntos por los 2 en las centenas y entre 500 y 599 se restan 100 puntos por los 5 en las centenas.
- Con lo anterior concluimos que al escribir todos los números entre 1 y 999 la cuenta total sigue en 0.
- Los puntos obtenidos al escribir los números entre el 1000 y el 1999 son iguales a los puntos entre 1 y 999, pues el 1 de las unidades de mil no aporta puntaje, por lo que este intervalo tampoco modifica el puntaje final.
- Sólo nos faltan los números entre el 2000 y el 2024, hay 25 puntos por los 2 en las unidades de mil, ahora basta ver los puntos entre 1 y 24. Entre 1 y 10 ya sabemos que no hay puntos, lo mismo aplica para los números entre 10 y 19. Finalmente los números 20, 21, 22, 23 y 24 aportan 6 puntos al total, por lo que luego de haber escrito los 2024 números se tiene que el valor de $A - B$ es igual a 31, por lo que la ganadora es Antonia sin importan como jueguen.

$\blacksquare$