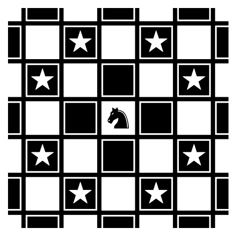
Nivel Mayor (Soluciones)

Segunda fecha

30 de noviembre de 2024

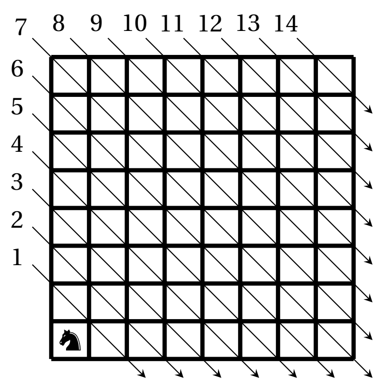
La cisterna

Problema 1. *El equipo organizador está jugando con un tablero de ajedrez; este es un tablero cuadriculado de* 8×8 *casillas. Una de las piezas del juego es el Caballo; esta pieza dentro de una casilla se mueve a una casilla que esté ubicada a dos pasos en línea recta en una dirección (vertical u horizontal) y luego se mueve un paso en ángulo recto (en la dirección perpendicular). A continuación, marcamos con estrellas las casillas a las que se puede mover el caballo.*



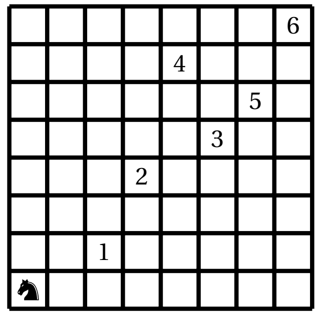
Si el caballo parte en una de las esquinas del tablero, ¿cuál es la mínima cantidad de movimientos necesarios para llegar a la esquina opuesta?

Solución. Supongamos que el caballo está en la esquina inferior izquierda, por lo que el objetivo sería llegar a la esquina superior derecha. Ahora, notemos que la cantidad de diagonales noreste a suroeste que hay que atravesar para llegar a la esquina opuesta es 14.



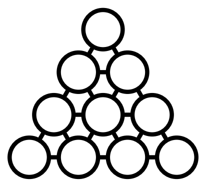
Luego, notemos que con el movimiento del caballo, podemos atravesar a lo más 3 de estas diagonales, por lo que es imposible llegar en menos de 5 movimientos.

Además, notemos que debe llegar en una cantidad par de movimientos: la esquina opuesta es del mismo color que la casilla de partida, y cada vez que el caballo cambia de casilla, termina en una casilla de un color opuesto. Por tanto, no es posible tampoco llegar en 5 movimientos. Pero es posible llegar en 6.



■

Problema 2. *Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero, como se indica en la figura; se juega un solitario.*



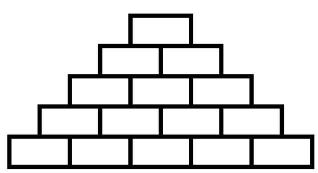
Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento. Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?

Solución. Una posible solución es la siguiente. Notemos que en el tablero, hay casillas de tres tipos; vértice, lado, o interiores, y que cada una de ellas tiene, respectivamente, dos, cuatro o seis casillas vecinas; más en general, una cantidad par.

Si pudiéramos retirar todas las fichas del tablero, habría un momento en que quedaría sobre él una única ficha negra. Esa ficha era inicialmente blanca, por lo que ha tenido que cambiar de color un número impar de veces. Pero esto es imposible, porque una ficha se vuelve cada vez que se retira una ficha vecina, y ninguna ficha tiene un número impar de casillas vecinas.

■

Problema 3. *En una pirámide, cada celda es el producto de las dos celdas de abajo. Si la celda de la cima es 560105280. ¿Cuales pueden ser las celdas de la base si son todas distintas?*



Solución. Notemos que $560105280 = 2^6 \times 3^6 \times 5 \times 7^4$. Además, haciendo un análisis nivel por nivel, notamos que las dos celdas extremas de la base aportan una única vez al valor de la cima, mientras que las vecinas aparecen 4 veces entre los factores de la cima, mientras que la celda central aparece 6 veces. Así, de forma forzada, una de las casillas extremas es un múltiplo de 5, mientras que una de las casillas más centradas debe ser un múltiplo de 6.

Por último, teniendo cuidado de no repetir, tenemos las siguientes opciones como base:

2	1	3	14	10	3	1	2	21	15
2	14	3	1	10	3	21	2	1	15
10	1	3	14	2	15	1	2	21	3
10	14	3	1	2	15	21	2	1	3
6	3	1	14	30	6	2	1	21	30
6	14	1	3	30	6	21	1	2	30
30	14	1	3	6	30	21	1	2	6
30	3	1	14	6	30	2	1	21	6
4	1	3	14	5	9	1	2	21	5
4	14	3	1	5	9	21	2	1	5
5	1	3	14	4	5	1	2	21	9
10	14	3	1	2	5	21	2	1	9
12	3	1	14	15	12	2	1	21	15
12	14	1	3	15	12	21	1	2	15
15	14	1	3	12	15	21	1	2	12
15	3	1	14	12	15	2	1	21	12
18	3	1	14	10	18	2	1	21	10
18	14	1	3	10	18	21	1	2	10
10	14	1	3	18	10	21	1	2	18
10	3	1	14	18	10	2	1	21	18

$\blacksquare$