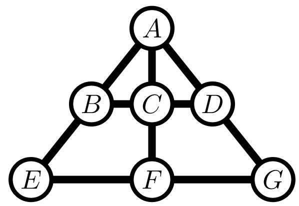
Nivel Mayor (Soluciones)

Primera fecha

16 de noviembre de 2024

La cisterna

Problema 1. *Se tiene la siguiente figura, donde cada letra representa un dígito del 1 al 7 distinto.*



Se cumple además que esta figura es un triángulo mágico, esto es: existe un número S, tal que al sumar tres dígitos que pertenezcan a una misma linea (por ejemplo A, B y E), se obtiene como resultado S.

Encuentre todos los valores de G para los cuales es posible rellenar el triángulo mágico.

Solución. Primero, notemos que

$$A + B + C + D + E + F + G = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} (A + B + E) + (A + C + F) + (A + D + G) &= 3S \\ 2A + 28 &= 3S. \end{aligned}$$

Por otra parte, también tenemos que

$$\begin{aligned} A + (B + C + D) + (E + F + G) &= 28 \\ A + 2S &= 28. \end{aligned}$$

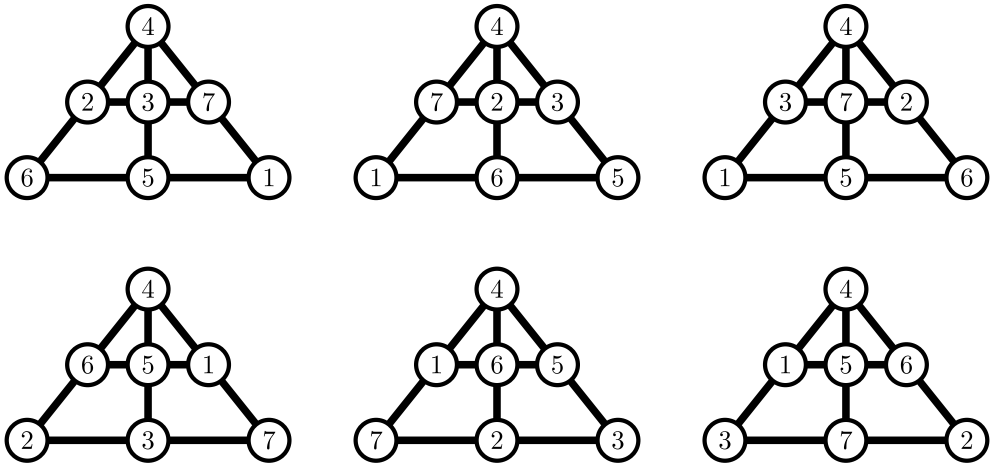
Juntando ambas ecuaciones, por ejemplo, despejando S y obteniendo $3(28-A) = 2(2A+28)$, obtenemos que $A = 4$. Como esta es una condición necesaria, concluimos que A solo puede tomar el valor de 4.

Alternativamente, otra posible manera de calcular A es notar que

$$\begin{aligned} (A + B + E) + (A + C + F) + (A + D + G) + (B + C + D) + (E + F + G) &= 5S \\ A + 2 \cdot 28 &= 5S. \end{aligned}$$

Luego, hay que darse cuenta que para que la ecuación sea verdadera, es necesario que A sea de la forma $5k + 4$, pues el lado derecho es un múltiplo de 5 y $2 \cdot 28 = 56 = 5 \cdot 11 + 1$. Con esto, notamos que el único dígito del 1 al 7 que cumple lo anterior es el 4.

Por último, notemos que entonces $S = 12$, por lo que en las filas encontraremos las ternas $(1, 5, 6)$ y $(2, 3, 7)$; mientras que en las columnas encontraremos las parejas $(1, 7)$, $(2, 6)$ y $(3, 5)$. Así, es fácil notar que tenemos solución única salvo permutaciones, las cuales nos permiten establecer para G cualquier valor de los que tenemos disponibles:



Con ello, mostramos que los posibles valores de G son 1, 2, 3, 5, 6 y 7.

$\blacksquare$

Problema 2. *Álvaro escribió cierto número en la calculadora y lo multiplicó por 99, sin embargo la pantalla de la calculadora tiene un par de manchas, lo que puede ver es el siguiente número de 12 cifras:*

895_7321_705

Donde los espacios en blanco representan las manchas que impiden ver dos de los dígitos. ¿Cuáles son los posibles valores de los dígitos que no se ven?

Solución. Como el resultado es múltiplo de 99, entonces es divisible por 9 y por 11.

Un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9, llamemos a al primer dígito que falta y b al segundo, la suma de los dígitos es $8+9+5+7+3+2+1+7+0+5+a+b = 47+a+b$, como a y b son a lo más 9 cada uno, entonces la suma de los dígitos sólo puede tomar o bien el valor 54 o el valor 63, es decir, $a+b=7$ o $a+b=16$.

Por otro lado, un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de sus dígitos alternando los signos es divisible por 11, en este caso nos da $5-0+7-b+1-2+3-7+a-5+9-8 = 3+a-b$, como a y b son a los más 9 cada uno, los únicos múltiplos de 11 que puede valer $3+a-b$ son 11 y 0, es decir, $a-b=8$ o $b-a=3$.

Si $a-b=8$, entonces a y b tienen la misma paridad, luego no puede ser que $a+b=7$, por lo que $a+b=16$, pero al sumar ambas ecuaciones tendríamos que $(a-b)+(a+b) = 8+16$, es decir, $2a=24$, por lo que $a=12$, lo que no es posible pues a es un dígito.

Sólo nos queda el caso en el que $b-a=3$, concluimos que a y b tienen paridades contrarias, por lo que no es posible que $a+b=16$, debe cumplirse entonces que $a+b=7$, al sumar ambas ecuaciones se tiene que $(b-a)+(a+b)=3+7$, es decir, $2b=10$, o bien $b=5$, al reemplazar en cualquiera de las ecuaciones se obtiene $a=2$, por lo que el número que muestra la calculadora es 895273215705.

$\blacksquare$

Problema 3. *Fernanda y Francisca están jugando el siguiente juego en una pizarra: primero, se escriben los números del 1 al 9. Luego, por turnos, cada una elige un número que no haya sido borrado aún y borra de la pizarra este número junto con todos sus múltiplos. Pierde quien deje la pizarra sin ningún número disponible.*

Si Fernanda comienza borrando, determine una estrategia ganadora para ella, es decir, una forma de jugar que garantice su victoria, independientemente de los números que vaya borrando Francisca.

Solución. Notemos primero las siguientes deducciones:

- No es posible borrar al 1 en una estrategia ganadora, pues todo número entero es múltiplo de 1, y por ende borrar el 1 es borrar también a todos los números.
- el 5 y 7 son jugadas muertas, pues ninguno borra a ningún otro número, más aún, luego de que una de ellas borre a uno de estos números, la otra puede borrar el otro.
- el 2 y el 3 no puede ser parte de una estrategia ganadora, pues, a excepción de el 1, el 5 y el 7, todos los números son múltiplos de 3 o de 2. Así, si una borra alguno de estos dos números, la otra borrara el restante, dejando una cantidad impar de turnos, asegurando su victoria.

Gracias a lo anterior, podemos hacer una exploración exhaustiva usando solo los números 4, 6, 8 y 9:

- Si Fernanda juega 4, se borran el 4 y el 8, dejando disponible el 6 y el 9, con lo que quedarían una cantidad impar de turnos, garantizando su victoria.
- Si Fernanda juega 6 o 9, Francisca puede borrar el 8, dejando una cantidad impar de turnos, por lo que perdería Fernanda.
- Si Fernanda juega 8, Francisca puede borrar el 4, el 6 o el 9, y dejará una cantidad impar de turnos, lo que perdería Fernanda.

Así, podemos escribir la siguiente estrategia para Fernanda:

- Si es el primer turno, Fernanda borrará el 4, y con ello el 8.
- Si Francisca eligió en el turno anterior el 5 o el 7; Fernanda eligirá en su turno el otro.
- Si Francisca eligió en el turno anterior el 2 o el 3; Fernanda eligirá en su turno el otro.
- Si Francisca eligió en el turno anterior el 6 o el 9; Fernanda eligirá en su turno el otro.

■