Nivel Mayor (Soluciones)

Segunda fecha

23 de noviembre de 2024

Problema 1. *En un lago hay 2024 hojas dispuestas en una fila, hay dos ranas, una en la primera hoja y otra en la segunda hoja. Cada minuto ambas ranas saltan a la vez, cada vez que salta una rana, esta decide si salta hacia la siguiente hoja o a la que está 3 hojas hacia adelante. ¿Es posible que cada una de las hojas haya sido visitada exactamente una vez por exactamente una de las ranas?*

Solución. Demostraremos que si las ranas están en dos hojas consecutivas, siempre pueden avanzar a las dos siguientes. En efecto, si las ranas están en las hojas n y n+1, entonces la que está en la hoja n+1 salta a la siguiente, es decir, a la n+2 y la que está en la n salta a la que está 3 espacios hacia adelante, es decir, a la n+3, esto significa que las ranas avanzaron de las posiciones n y n+1 a la n+2 y n+3. Aplicando lo anterior iterativamente las ranas pasan de las posiciones 1 y 2 a la 3 y 4, de la 3 y 4 a la 5 y 6, y así hasta el final. De este modo pueden recorrerlas todas exactamente una vez.

■

Problema 2. *Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentados alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a la otra en más de una reunión?. Justifica.*

Solución. La respuesta es sí, pueden celebrar las cuatro reuniones de modo que al final cada persona haya estado sentada junto a otras dos diferentes cada vez. Para demostrarlo, consideramos las siguientes cuatro formas de ordenar los números del 1 al 9, que representan cuatro maneras de sentarse alrededor de la mesa comenzando en un lugar y moviéndose en el sentido de las agujas del reloj:

Primera reunión: $1,2,3,4,5,6,7,8,9$

Segunda reunión: $1,3,5,7,9,4,6,2,8$

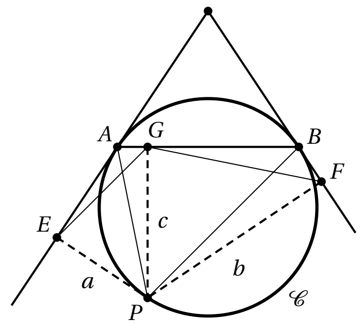
Tercera reunión: $1,4,7,3,8,5,2,9,6$

Cuarta reunión: $1,5,9,3,6,8,4,2,7$

■

Problema 3. *Sea $\mathscr{C}$ una circunfencia y sean A,B,P tres puntos de $\mathscr{C}$. Sean $\mathscr{L}_A$ y $\mathscr{L}_B$ las rectas tangentes a $\mathscr{C}$ que pasan por A y por B respectivamente. Sean a,b las distancias de P a $\mathscr{L}_A$ y $\mathscr{L}_B$ respectivamente y sea c la distancia de P a la cuerda de $\mathscr{C}$ determinada por A y por B. Demuestre que $c^2 = a \cdot b$*

Solución. Sean E,F,G tales que $E \in \mathscr{L}_A$ y $\overline{PE} \perp \mathscr{L}_A$, $F \in \mathscr{L}_B$ y $\overline{PF} \perp \mathscr{L}_B$ y $G \in \overline{AB}$ y $\overline{PG} \perp \overline{AB}$.



Notemos que el cuadrilátero $PEAG$ es cíclico, pues tiene un par de ángulos opuestos rectos, en particular $\angle PEG = \angle PAG = \angle PAB$. Además el $\angle PBF$ es semiinscrito y el arco que subtiende es $\widehat{BP}$, por lo que mide lo mismo que el $\angle PAB$. Como el cuadrilátero $PGBF$ también es cíclico por tener un par de ángulos opuestos rectos, se cumple que $\angle PGF = \angle PBF$, por lo que se concluye que $\angle PEG = \angle PGF$. De la misma manera se prueba que $\angle PFG = \angle PBG = \angle PBA = \angle PAE = \angle PGE$. Con todo lo anterior concluímos que $\triangle PEG \sim \triangle PGF$ por criterio AA. En particular se cumple que:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{PG}}{\overline{PF}} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Longrightarrow c^2 = ab$$

■