Nivel Mayor (Soluciones)

Primera fecha

9 de noviembre de 2024

Problema 1. *sofía tiene muchas cajas en las que guarda dulces. Cada día por la mañana elige 2 de esas cajas y deja un dulce en cada una, pero cada noche un ladrón elige una caja y se roba todos los dulces que haya en ella. El sueño de Sofía es despertar un día y encontrar una caja con 2024 dulces. Demuestre que Sofía siempre puede cumplir su sueño si tiene suficientes cajas.*

Solución. Si Sofía siempre escoge dos cajas vacías el ladrón siempre roba a lo más 1 dulce cada noche, de este modo Sofía siempre tiene por lo menos una caja con un dulce más que las que tenía el día anterior, así puede conseguir tener tantas cajas con un dulce como quiera, Sofía repite este procedimiento hasta que tenga 2^{2024} cajas con un dulce cada una.

Alcanzado este punto cambia su estrategia y comienza a escoger dos cajas que contengan un dulce, ahora el ladrón puede llevarse cajas con dos dulces en la noche, pero cada día tiene una caja con dos dulces más de las que tenía el día anterior hasta que se le acaben las cajas con 1 dulce, en este punto la mitad de las cajas que teníann 1 dulce ahora tienen 2 y la otra mitad está vacía, es decir, tiene 2^{2023} cajas con 2 dulces.

Ahora puede hacer lo mismo eligiendo cajas con 2 dulces, el ladrón robará cajas con 3 dulces, al terminar tendrá la mitad de las cajas con 3 dulces, es decir, tendrá 2^{2022} cajas con 3 dulces.

Repitiendo este proceso siempre puede tener un dulce más que en la etapa anterior, pero en la mitad de las cajas, tendrá 4 dulces en 2^{2021} cajas, luego 5 dulces en 2^{2020} cajas.

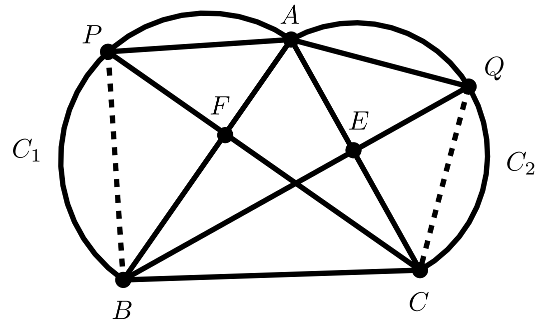
Finalmente, luego de 2024 de estas etapas terminará con una caja con 2024 dulces.

■

Problema 2. *Se tiene el triángulo acutángulo ABC. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ semicircunferencias que tienen como diámetro AB y AC respectivamente, de modo que las semicircunferencias quedan en el exterior de ABC. En ABC, se extiende la altura que pasa por C intersectando a $\mathcal{C}_1$ en P, y de igual manera, Q es la intersección de $\mathcal{C}_2$ con la extensión de la altura que pasa en B. Demuestre que las medidas de $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales.*

Solución. Notemos que los triángulos APB y AQC son rectángulos. Por ende, por teorema de Euclides, tenemos las siguientes igualdades.

$$AP^2 = AF \cdot FA \qquad AQ^2 = AE \cdot AC$$



Ahora, notemos que $\Delta AFC \sim \Delta AEB$, por lo que

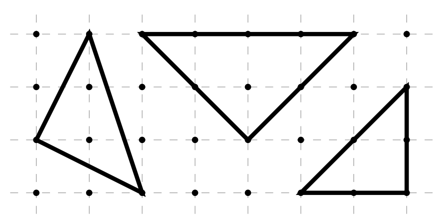
$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AF \cdot AB = AE \cdot AC.$$

Finalmente, concluimos la igualdad juntando todas las ecuaciones.

$$AP^2 = AF \cdot AB = AE \cdot AC = AQ^2 \Rightarrow AP = AQ$$

■

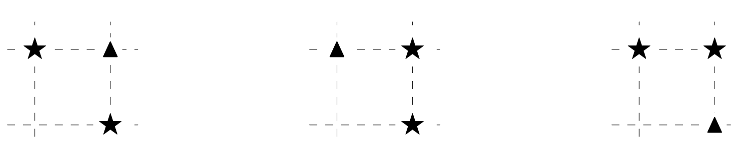
Problema 3. *En el plano cartesiano se pintan los puntos que tienen coordenadas enteras, cada uno siendo de color rojo, verde, o azul. Notar que es posible formar triángulos de ángulos $45-90-45$ usando vértices coloreados de este plano.*



Demuestre que sin importar como sea esta coloración, existe un triángulo de ángulos $45-90-45$ tal que todos sus vértices son puntos pintados del mismo color o pintados todos de colores diferentes.

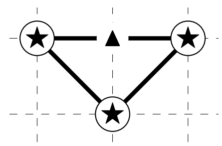
Solución. Asumamos por contradicción que la coloración previa existe y veamos que luego ninguna construcción de la coloración es posible.

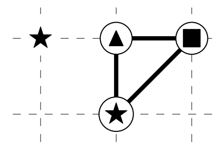
Una forma de partir una construcción será tomar los puntos $(1,1)$, $(0,1)$ y $(1,0)$, los cuales forman un triángulo de ángulos $45-90-45$. Ahora notemos que estos deben estar coloreados, salvo la elección de colores que se usarán, de alguna de estas tres maneras:



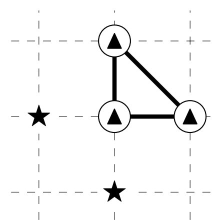
pues en cualquiera de estas maneras, cambiar de color un solo punto te deja, o bien en otra manera, o bien con un triángulo con tres vértices del mismo color o distintos, lo cual no puede ocurrir.

Ahora estudiaremos el caso de más a la izquierda. Veamos que el color del punto de coordenadas $(2,1)$ no puede ($\bigstar$), pues junto con $(0,1)$ y $(1,0)$ formarían un triángulo de tres vértices iguales. Tampoco puede ser de un tercer color ($\blacksquare$), pues junto con $(1,1)$ y $(1,0)$ formarían un triángulo con tres vértices de diferente color.





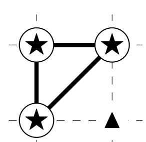
Por tanto, $(2,1)$ debe estar pintado de color ($\blacktriangle$). Asimismo, este argumento es análogo para $(1,2)$. Pero entonces ocurre que $(2,1)$, $(1,2)$ y $(1,1)$ forman un triángulo $45-90-45$ de tres vértices del mismo color.

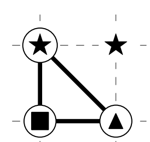


Por tanto, la coloración debe tener si o si la segunda o tercera manera de colorear.

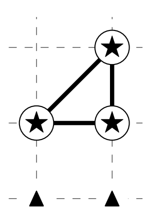
Ahora estudiaremos el caso de más a la derecha, pues el de al medio es análogo mediante simetría y no será necesario de estudiarlo por separado, solo replicar esta parte.

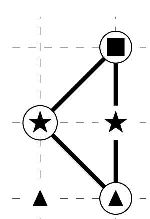
Primero, notemos que $(0,0)$ debe ser ($\blacktriangle$); sino formará un triángulo con vértices ($\bigstar$) o bien uno con vértices diferentes con $(1,0)$ y $(0,1)$.





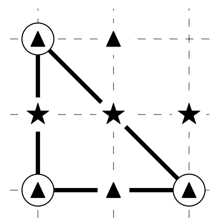
Ahora notemos que $(1,2)$ debe ser ($\blacktriangle$); no puede ser ($\bigstar$) pues con $(0,1)$ y $(1,1)$ formarían un triángulo con vértices de un mismo color, ni tampoco ($\blacksquare$), pues con $(0,1)$ y $(1,0)$ formarían uno de tres vértices diferentes.





Luego, $(2,1)$ debe ser (★); es fácil ver que no puede ser (■) pues aparecería un triángulo con tres vértices diferentes, y si fuera (▲) formaría un triángulo de vértices (▲) en conjunto con $(1,2)$ y $(1,0)$.

Por último, revisamos el primer argumento que usamos para este caso, el cual podemos replicar para saber que $(0,2)$ y $(2,0)$ deben ser (▲). Así, estos últimos en conjunto con $(0,0)$ formaran un triángulo (▲), por lo que ninguna construcción es posible.



■