Nivel Menor (Soluciones)

Segunda fecha

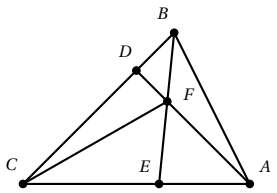
13 de septiembre 2025

Problema 1. *Se vienen las fiestas patrias, y como evento principal el Antagonista, la Barajadora y el Coleccionador se disponen a armar un puesto de trompos en su fonda favorita. Pasado un rato, se disponen a jugar algunas rondas donde una pareja juega un uno contra uno, mientras que la tercera persona solo observa. Cuando una ronda termina, la persona que estaba observando se prepara para jugar contra quien ganó dicha ronda, mientras que quien perdió la ronda sale y observa el encuentro que está por venir. Así, jugaron una ronda tras otra, resultando en que el Antagonista jugó 16 rondas, la Barajadora jugó 11 rondas, y el Coleccionador jugó 19 rondas. ¿Quién de los tres perdió en la segunda?*

Solución. Notemos que se jugaron $(16+11+19)/2 = 23$ rondas, y que la Barajadora no estuvo en $23-11=12$ de estas. Notemos que la única manera de no participar en una partida es haber jugado la anterior y perder, o no haber jugado en la primera ronda. Como la Barajadora solo jugó en 11 rondas, en estas 11 las debió perder para no jugar la siguiente, y además debió partir no jugando. Por tanto, la Barajadora juega en las partidas pares y las perdió todas, en particular, la segunda. ■

Problema 2. *En el triángulo ABC, sea D un punto en $\overline{BC}$ tal que $3BD = DC$, y sea E un punto en $\overline{AC}$ tal que $5AE = 2AC$. Además, sea F la intersección entre $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Determine la razón $\text{Área}(DFB) : \text{Área}(EFA)$.*

Solución. Notemos que, despejando, $EC = \frac{3}{2}AE$ y que, directo de enunciado, $DC = 3BD$. Por tanto, $\text{Área}(EFC) = \frac{3}{2}\text{Área}(EFA)$ al compartir altura, y similarmente $\text{Área}(DFC) = 3\text{Área}(DFB)$.



Ahora, notemos que $EC = \frac{3}{5}AC$ y que $DC = \frac{3}{4}BC$. Por tanto, usando el mismo argumento que en el párrafo anterior tenemos las siguientes igualdades:

- $\frac{3}{5}\text{Área}(ABC) = \text{Área}(BEC) = \text{Área}(DFB) + \text{Área}(FDC) + \text{Área}(EFC) = 4\text{Área}(DFB) + \frac{3}{2}\text{Área}(EFA)$
- $\frac{3}{4}\text{Área}(ABC) = \text{Área}(ADC) = \text{Área}(EFA) + \text{Área}(EFC) + \text{Área}(DFC) = \frac{5}{2}\text{Área}(EFA) + 3\text{Área}(DFB)$

Amplificando las primeras igualdades por 10 y las segundas por 8, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$6 \cdot \text{Área}(ABC) = 40 \cdot \text{Área}(DFB) + 15 \cdot \text{Área}(EFA)$$
$$6 \cdot \text{Área}(ABC) = 24 \cdot \text{Área}(DFB) + 20 \cdot \text{Área}(EFA)$$

De donde es fácil llegar a que $16 \cdot \text{Área}(DFB) = 5 \cdot \text{Área}(EFA)$ y que la razón que buscamos es $\frac{5}{16}$. ■

Problema 3. *Un tablero de* 3×3 *tiene 9 casillas de* 1×1*, en las cuales se desean anotar en ellas un dígito del 1 al 9 sin repetir. Ahora, se toman los tres números resultantes de juntar los dígitos que hay en cada una de las filas, y los tres números resultantes de hacer esto mismo con las columnas, y luego, se suman estos seis números juntados. Por ejemplo, en el siguiente tablero:*

1	2	3
4	5	6
7	9	8

los números que se forman en las filas son 123, 456 *y* 798*, y en las columnas se forman* 147, 259 *y* 368*, con lo que la suma que se calcula en este tablero es* $123+456+798+147+259+368=2151$*. ¿Es posible rellenar el tablero de manera que la suma a calcular de un total de 2025?*

Solución. Sí, es posible. Una manera de encontrar un tablero es la siguiente:

Primero, pongamos nombre a las casillas:

A	B	D
C	F	G
E	H	I

De este modo, queremos que

$$200\cdot A+110\cdot(B+C)+101\cdot(D+E)+20\cdot F+11\cdot(G+H)+2\cdot I=2025.$$

Notemos que $20\cdot F+11\cdot(G+H)+2\cdot I\le 180+165+12=357$.
Por lo anterior, $200\cdot A+110\cdot(B+C)+101\cdot(D+E)\ge 2025-357=1668$.

Ahora, notemos también que $200\cdot A+110\cdot(B+C)+101\cdot(D+E)>100A+100(A+B+C+D+E)\ge 100A+1500$, y por la cota anterior, la única opción es que $A=1$ y que B, C, D y E deben ser los dígitos entre 2 y 5. Consecuentemente, F, G, H e I deber ser los dígitos entre 6 y 9.

Continuando con las deducciones, recordemos que las unidades sumadas, $D+E+G+H+2I$, deben terminar en 5. Notemos que $D+E+G+H+2I$ es a lo más $(4+5)+(7+8)+2\cdot 9=42$ y al menos $(2+3)+(8+7)+2\cdot 6=32$, por tanto $D+E+G+H+2I=35$.

Terminando, como $G+H+F+I=6+7+8+9=30$, entonces $35=D+E+G+H+2I=D+E+(30-F-I)+2I=D+E+30+I-F$, es decir, $F-I=D+E-5\ge 0$, en particular, $F>I$. Se puede mostrar que ésta es en realidad la última restricción deducible y que todos los tableros se pueden construir eligiendo un par de F e I que se ajusten a las restricciones y luego ajustando el resto de números a partir de ahí.

A fin de recapitulación, veamos lo siguiente:

La lista de restricciones para construir un tablero es la siguiente:

- $A=1$
- $9\ge F>I\ge 6$.
- $D+E=5+F-I$
- $B,C,D,E\in\{2,3,4,5\}$
- $F,G,H,I\in\{6,7,8,9\}$

Mostremos un ejemplo: Sea $F=9$ e $I=6$, luego $D+E=5+9-6=8$, por ejemplo $D=3$ y $E=5$.
Así, podemos ir completando y obtener

1	2	3
4	9	7
5	8	6

$$123+497+586+145+298+376=2025.$$

■