Nivel Mayor (Soluciones)

Primera fecha

13 de septiembre 2025

Problema 1. *La lotería "TirosNítidos" vende cartillas donde hay que adivinar el resultado de 4 partidos; para cada uno de ellos, tiene que adivinar si hay goles o no. Cada cartilla de TirosNítidos se declara ganadora si se equivoca en a lo más un partido, es decir, acierta en exactamente 3 o en 4 partidos. ¿Cuál es la mínima cantidad de cartillas que se pueden comprar para asegurar tener una cartilla ganadora? Muestre además un ejemplo.*

Solución. Primero, notemos no pueden ser 3 o menos cartillas. En efecto, de ser así, notamos que cada cartilla cubre a lo más 5 escenarios; donde acierta todos, donde se equivoca solo en el primer partido, solo en el segundo, solo en el tercero o solo en el cuarto. Por tanto, cubrimos a lo más 15 resultados de cartillas distintos, pero en total debiesen haber $2^4 = 16$ posibles cartillas, por lo que podría justo suceder ese escenario sin cubrir y nos quedaríamos sin ganar.

Ahora, veamos que con cuatro cartillas es suficiente. Un ejemplo que funciona es comprar las siguientes cuatro cartillas:

(A) uno donde apostamos a que hay goles en todos los partidos.

(B) otro donde apostamos que hay goles en todos salvo en el primer partido.

(C) otro donde apostamos que no hay goles en ningún partido salvo el primero.

(D) y un último donde apostamos que no habrá ningún gol en ningún partido.

Mostremos que funciona:

- Si resulta que en los cuatro partidos hay goles, entonces (A) acierta perfectamente.
- Si resulta que en tres de los cuatro partidos hay goles, entonces (A) gana pues se equivoca solo en el partido que no hubo goles.
- Si resulta que en dos de los cuatro partidos hay goles, tenemos dos casos:
  - Si en el primer partido hubo un gol, entonces (C) gana, pues solo se equivoca en el segundo partido que hubo goles.
  - Si en el primer partido no hubo goles, entonces (B) gana, pues solo se equivoca en el segundo partido que no tuvo goles.
- Si resulta que en uno solo de los partidos hubo goles, entonces (D) gana, pues solo se equivoca en un partido donde si hubo goles.
- Si resulta que en ninguno de los partidos hubo goles, entonces (D) acierta perfectamente.

Con esto, revisamos que todos los posibles resultados de los cuatro partidos dan a alguna de nuestras 4 cartillas como ganadora.

■

Problema 2. *La IndexMon es una colección de enciclopedias de monstruos de una famosa franquicia. En su cuarta edición se presentan 493 ejemplares, todos enumerados con un indice entre 1 y 493. Edgardo tiene un monstruo favorito al que le gusta revisitar de vez en cuando. Para recordar cuál era el indice de su monstruo favorito, él recurre a un acertijo que utiliza a su número favorito* **Ñ**. *El acertijo resulta ser el siguiente: "tanto su indice como el antecesor de su indice resultan en ser los dos únicos indices de la cuarta edición que no pueden dividir a Ñ."*

Cuándo le preguntamos cuál era el número Ñ, Edgardo solo nos respondió: "Es un secreto".

Con toda la información anterior presentada ¿Cuál es el indice del monstruo favorito de Edgardo?

Solución. Sea a uno de los números que no dividen a $\tilde{N}$.

Primero, jugando un rato, descartamos rápidamente al 1 y al 2, pues entonces ningún par podría dividir a $\tilde{N}$, lo que no es cierto pues solo 1 y 2 deberian no dividirle.

Ahora, notamos que a, que debe ser mayor a 1, no puede ser menor o igual a $\lfloor 493/2 \rfloor = 246$; de serlo, entonces $2a$ no solo no es consecutivo a a, sino que también aparece entre los números de 1 a 493, pero si a no divide a $\tilde{N}$, $2a$ tampoco, lo que es una contradicción.

Por tanto, a está entre 247 y 493.

Ahora, notemos que uno de los dos números que no dividen a $\tilde{N}$ debe ser par. Supongamos que es a. Así, tenemos que entonces a es de la forma $2^n \cdot I$, con n un entero positivo e I un número impar. Como $2^n > 2$, tenemos que $I \leq \lfloor 493/2 \rfloor = 246$, por tanto I debe dividir a $\tilde{N}$ al ser menor que 246. De igual forma, notemos que entonces $I = 1$; en caso contrario, $I > 2$ y $2^n \leq \lfloor 493/I \rfloor \leq \lfloor 493/2 \rfloor = 246$, lo cual es una contradicción pues $a = 2^n \cdot I$ no divide a $\tilde{N}$, pero 2^n e I por separado sí.

Por lo tanto, estamos buscando un a de la forma 2^n mayor a 246, de donde $256 = 2^8$ es nuestro único candidato.

Por último, veamos cuál es el otro número a parte de 256, el cuál solo puede ser o 255 o 257. 255 no es posible puesto que se puede descomponer en $5 \cdot 51$, ambos menores a 246, y por ende divide a $\tilde{N}$. Así, nuestro único candidato que nos queda es 257, el cuál debemos mostrar que no puede ser descompuesto en números que dividan a $\tilde{N}$.

En efecto, basta con que mostremos que 257 es primo: 257 es $16^2 + 1$, por lo que solo debemos revisar que 2, 3, 5, 7, 11 o 13 dividan a 257. Es claro que no satisface con los criterios de divisibilidad de 2, 3, 5 u 11, y además $257 = 210 + 49 - 2 = 7 \cdot 37 - 5$ y $257 = 260 = 13 \cdot 20 - 3$.

Por tanto, los únicos números que no dividen a $\tilde{N}$ son 256 y 257 respectivamente, dejando 257 como el número del monstruo favorito.

$\blacksquare$

Problema 3. *Sea Ω una circunferencia en el plano y A un punto en ella. Sea Γ la figura formada por A y por todas las reflexiones centrales de A con respecto a algún punto que pertenezca a Ω. ¿Qué figura geométrica es Γ?*

Solución. Sea B un punto en Ω tal que $\overline{AB}$ es diámetro de Ω. Ahora, mostraremos que Γ es una circunferencia de centro B y radio AB.

Primero, sea A' la reflexión central de A con respecto a B. Al ser reflexión, es claro que $BA = BA'$.

Ahora, Sea O punto medio de $\overline{BA}$ y por tanto centro de Ω. Sea también P un punto cualquiera en Γ distinto de A'. Por definición de Γ, existe Q distinto de B en Ω tal que P es la reflexión central de A con respecto a Q.

Ahora, miremos los triángulos QAO y PAB: comparten ángulo en A, $AB = 2AO$ y $AP = 2AQ$. Por tanto, debe ocurrir que los triángulos son semejantes. Así, como $AO = OQ$, se tiene también que $AB = BP$ y concluimos.

■