CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas XX

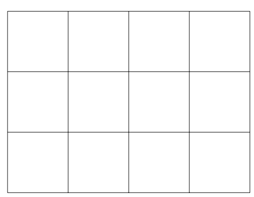
Cuarta fecha
10 de septiembre de 2022
Soluciones
Grupal

Laberintos

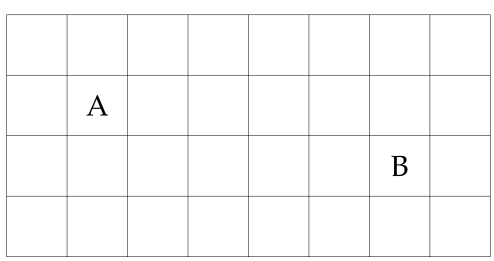
Quizá algunos de los más antiguos entre ustedes se han preguntado si le sucedió algo a nuestro carismático Patito, quien no ha aparecido en lo que va de año en las pruebas grupales. La verdad es que la misma pregunta nos hacíamos en el equipo académico del CMAT, puesto que no tuvimos muchas noticias de él... hasta ahora.

Recientemente Nicolás (uno de nuestros miembros más destacados y fiel discípulo de Patito) se enteró que Patito fue encerrado en un laberinto hechizado. Los motivos aún son desconocidos; posiblemente algún ser mágico lo consideró una amenaza debido a su gran influencia galáctica, espiritual, económica y por sobre todo, matemática.

Tras esto, Nicolás lideró un plan de rescate para salvar a nuestro querido Patito. Lo primero que hizo (junto al resto del equipo académico) fue reunir información básica. Aprendimos que estos **laberintos**, vistos desde arriba, están conformados por cuadrados del mismo largo que llamaremos **casillas**, y podemos pensar en ellos como un laberinto rectangular. Para nombrarlos, escribiremos primero la cantidad de filas y luego la cantidad de columnas. Por ejemplo, el laberinto a continuación tiene 3 filas y 4 columnas; diremos así que es un laberinto 3×4.



Nicolás ordenó investigar el hechizo que posee el laberinto. Para entenderlo, primero debemos conocer el concepto de **casilla inversa**. Diremos que una casilla es inversa a otra si la cantidad de columnas a izquierda y derecha se encuentran invertidas, al igual que la cantidad de filas arriba y abajo. Veamos el siguiente caso.



En la figura, la casilla A tiene 1 columna a la izquierda y 6 columnas a su derecha, mientras que la casilla B tiene 6 columnas a su izquierda y 1 columna a la derecha. Lo mismo ocurre verticalmente, la casilla A tiene 1 fila arriba y 2 abajo, mientras que B tiene 2 y 1 respectivamente. Debido a esto, decimos que A y B son casillas inversas. Otra manera de describir esta situación es que las casillas inversas son simétricas respecto al centro del laberinto.

Entendido ese concepto, veremos el funcionamiento del **hechizo**. En el laberinto solo es posible moverse en horizontal y vertical (no en diagonal), y solo una casilla a la vez. Justo antes de llegar a la nueva casilla, el hechizo **teletrasporta** a la casilla inversa respectiva.

Veamos un ejemplo. Patito, señalado con P, se encuentra en la siguiente casilla del laberinto.

	P					

Patito decide moverse una casilla hacia abajo (señalada con •). Con ello, el hechizo lo mueve a la casilla marcada con ★.

					★	
	P					
	•					

Llamamos a esto un **movimiento**, y que la persona llegó a la casilla con estrella en un movimiento.

Veamos un segundo ejemplo. Patito está en el siguiente laberinto.

		P		

Si Patito intenta moverse a la izquierda, llegaría a la casilla marcada con ♢; en cambio, si intenta moverse hacia abajo, llegaría a la casilla marcada con ♡.

		P		
		♡		
			♢	

Problema 1. Si Patito se encuentra en P, muestre todas las casillas a las que puede llegar en un movimiento.

		P					

Básica: P1 (1 pts.) | Menor: No | Mayor: No

Solución. En la figura, se encuentran marcadas con una estrella las casillas a las que Patito puede llegar.

					★		
				★		★	
		P			★		

■

Para no perdernos explorando los laberintos, Nicolás decidió realizar **mapas** con los recorridos. En primer lugar, se anota la casilla inicial (con la inicial de la persona encerrada en un círculo). Luego del primer movimiento, se anota la casilla con un 1. El segundo movimiento es anotado con un 2, y así sucesivamente.

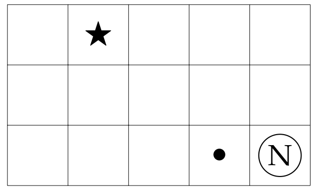
Veamos un mapa de ejemplo para comprender cómo ellos registran la información.

	2			
N				
		3		1

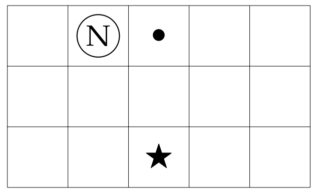
En este mapa, el primer movimiento de Nicolás debe haber sido hacia arriba, que hemos marcado con un punto. Hemos señalado con una estrella la casilla destino.

•				
N				
				★

Su segundo movimiento fue a la izquierda, donde hemos usado la misma notación de antes.

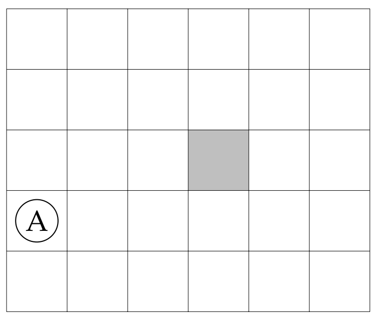


Por último, el tercer movimiento de Nicolás fue a la derecha.



De este modo, pese a que no se deje escrito el lugar al que nos movemos cada vez, podemos deducirlo viendo la casilla inversa a la que llegamos.

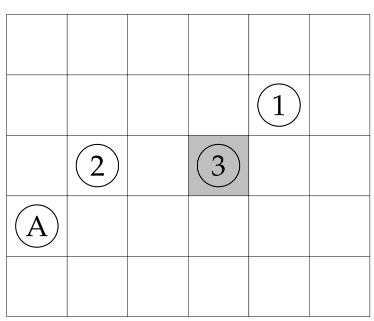
Problema 2. Para entender mejor el funcionamiento del hechizo, Anita quiere llegar a la casilla marcada.



¿Puede Anita llegar en tan solo tres movimientos? De ser posible, muestre un recorrido con el cual lo logre; en caso contrario, explique por qué no es posible.

Básica: P2 (2 pts.) | Menor: No | Mayor: No

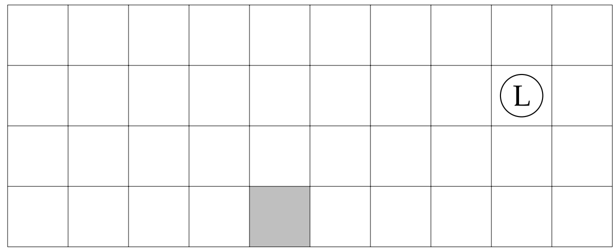
Solución. ¡Sí es posible! En la figura se muestra un recorrido con el cual Anita puede cumplir su objetivo.



Esta forma no es única, pues por ejemplo Anita podría moverse inicialmente hacia arriba y de todas formas llegar a 2 con su segundo movimiento.

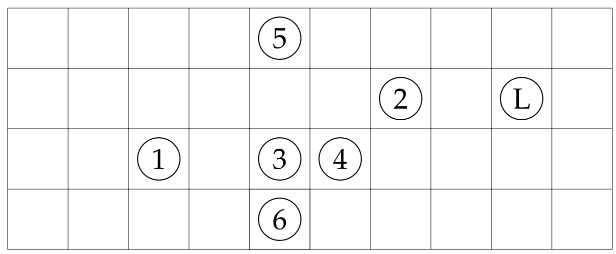
■

Problema 3. Muestre un recorrido con el cual Luis pueda llegar a la casilla gris.



Básica: No | Menor: P1 (2 pts.) | Mayor: P1 (2 pts.)

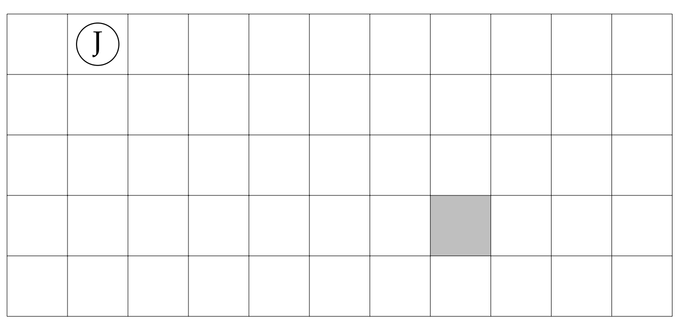
Solución. Una opción es la siguiente.



De hecho, Luis no puede llegar en menos de seis movimientos. Por otro lado, existen diversas formas de llegar a la casilla gris usando seis movimientos o más.

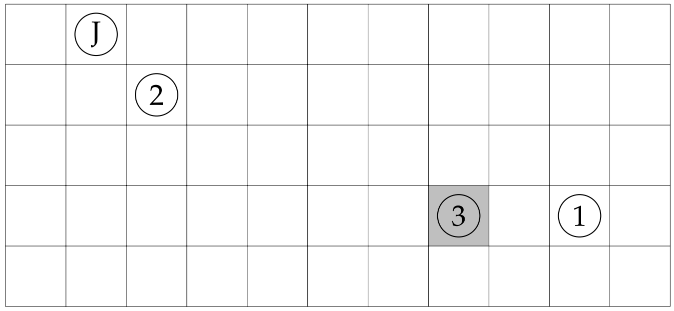
■

Problema 4. ¿Cuál es la mínima cantidad de movimientos que necesita realizar Jonathan para llegar a la casilla gris? Muestre un ejemplo usando dicha cantidad y explique por qué no puede llegar en menos movimientos.

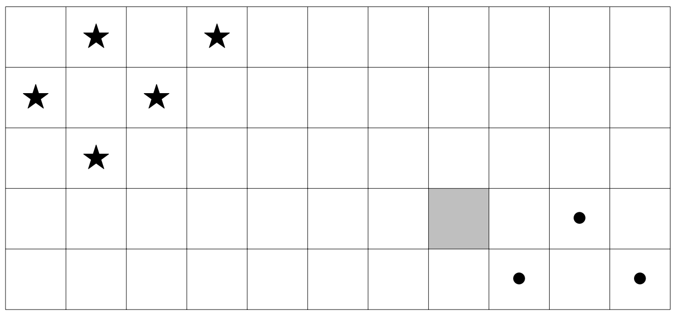


Básica: No | Menor: P2 (3 pts.) | Mayor: P2 (2 pts.)

Solución. La menor cantidad es tres. Para ver que es posible llegar en seis movimientos, veamos el siguiente mapa.

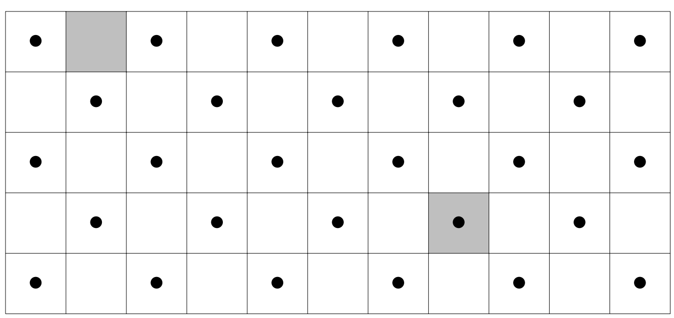


Para ver que no puede llegar en menos pasos, marcaremos con un punto los lugares a los que puede llegar desde la casilla inicial, y con una estrella los lugares a los que se puede llegar desde alguna de las casillas con un punto.



Como la casilla gris no está marcada sabemos que no se puede llegar en uno ni en dos movimientos. Así el mínimo es necesariamente tres, valor alcanzado previamente.

Solución alternativa. Ya sabemos que es posible llegar en tres movimientos. Para comprobar que no puede llegarse en menos, marquemos algunas de las casillas como sigue.



Notemos que los pares de casillas inversas están, o bien ambas marcadas, o bien ambas sin marcar. Así, luego de cada movimiento, pasamos de una casilla marcada a una sin marcar, o viceversa.

Ahora bien, la casilla inicial está sin marcar y la casilla de llegada está marcada. De este modo, no es posible llegar en dos movimientos. Es claro que no es posible llegar en un movimiento, por lo que el mínimo es tres.

■

Problema 5. Daniela se ubica en la esquina inferior izquierda de un laberinto 2×3. ¿Existe algún recorrido con el cual Daniela llegue a cada casilla al menos una vez? De existir, dé un ejemplo; en caso contrario, explique por qué no es posible realizar el recorrido.

Básica: P3 (3 pts.) | Menor: No | Mayor: No

Solución. Tal recorrido no existe. Para comprobarlo, nombremos las casillas como sigue.

1	2	3
4	5	6

Daniela inicia en la casilla 4. Notemos lo siguiente.

- Si Daniela se encuentra en 4, puede moverse hacia arriba (llegando a 6) o hacia la derecha (llegando a 2).
- Si Daniela se encuentra en 2, puede moverse hacia la izquierda (llegando a 6), hacia la derecha (llegando a 4), o hacia abajo (volviendo a 2).
- Si Daniela se encuentra en 6, puede moverse hacia arriba (llegando a 4), o hacia a la izquierda (llegando a 2).

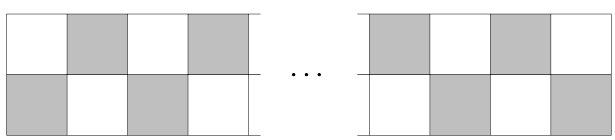
Vemos entonces que al estar en una casilla par, necesariamente llega a otra casilla par. Es decir, Daniela nunca llega a las casillas impares, por lo que no es posible llegar a cada casilla al menos una vez.

■

Problema 6. Daniela se ubica en la esquina inferior izquierda de un laberinto de 2×1011. ¿Existe algún recorrido con el cual Daniela llegue a cada casilla al menos una vez? Argumente.

Básica: No | Menor: P3 (3 pts.) | Mayor: P3 (2 pts.)

Solución. Tal recorrido no existe. Para ver esto, fijémonos en el laberinto y pintémoslo alternadamente, como se muestra en la figura.



Notemos que las columnas impares tienen blanco arriba, mientras que las pares tienen al gris arriba. Luego, si una casilla está en la columna a, su inversa estará en la columna $1012 - a$, que posee la misma paridad. Así, ambas columnas tendrán la misma coloración. Sin embargo, una casilla estará abajo y la otra arriba, por lo que casillas inversas tendrán colores opuestos.

De este modo, cada vez que Daniela realiza un movimiento, el hechizo la hace llegar a una casilla con el mismo color de la casilla en la que partió. Ya que ella comienza en la casilla inferior izquierda, resulta que Daniela solo puede llegar a casillas grises, pues inicia en la esquina inferior izquierda. Al no poder llegar a casillas blancas, el recorrido pedido no existe.

■

Problema 7. Fernanda afirma que en un laberinto de 4×4, independientemente de donde se inicie, se puede realizar un recorrido tal que se llegue a todas las demás casillas exactamente una vez. ¿Es verdad lo que afirma Fernanda? Explique.

Básica: P4 (3 pts.) | Menor: P4 (2 pts.) | Mayor: No

Solución. Efectivamente, siempre se puede realizar dicho recorrido. Para esto, debido a reflexiones y rotaciones, basta considerar los siguientes casos.

- Si Fernanda inicia en una esquina, puede realizar el siguiente recorrido.

F	7	2	9
5	12	15	4
10	13	14	11
3	8	1	6

- Si Fernanda inicia en una casilla del borde que no sea esquina, puede realizar el siguiente recorrido.

7	F	5	10
2	13	12	3
9	14	15	8
4	11	6	1

- Si Fernanda inicia en una de las casillas del centro, puede realizar el siguiente recorrido.

15	8	13	6
10	3	F	11
5	2	1	4
12	7	14	9

De este modo, independientemente del lugar en el que inicie Fernanda, puede realizar el recorrido, haciendo que la afirmación sea verdadera.

Solución alternativa. Consideremos la siguiente clasificación de casillas.

7	0	5	10
2	13	12	3
9	14	15	8
4	11	6	1

Notemos que Fernanda puede moverse desde la casilla n a la casilla $n+1$, para todo n entre 0 y 14. Además, Fernanda puede moverse desde 15 a 0. De este modo, existe un ciclo que pasa exactamente una vez por cada casilla antes de ser realizado completamente.

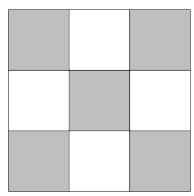
Por lo tanto, a Fernanda le basta con seguir el ciclo.

■

Problema 8. Hernán afirma que en un laberinto de 3×3, independientemente de donde se inicie, se puede realizar un recorrido tal que se llegue a todas las demás casillas exactamente una vez. ¿Es verdad lo que afirma Hernán? Explique.

Básica: No | Menor: No | Mayor: P4 (3 pts.)

Solución. Hernán se equivoca. Para demostrar esto, consideremos la siguiente coloración del laberinto.



Notemos que casillas inversas poseen el mismo color. De este modo, después de cada movimiento llegamos a una casilla de distinto color al de la casilla de partida.

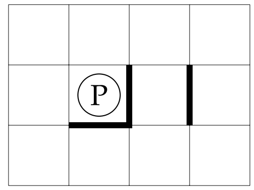
De este modo, si nos ubicamos inicialmente en una casilla blanca, la segunda casilla visitada será gris, la tercera blanca, y así sucesivamente. Luego de siete movimientos, habremos visitado cuatro casillas blancas y cuatro grises (contando la inicial). Al realizar el octavo movimiento llegaremos a una casilla blanca, por lo que no llegaremos a todas las casillas exactamente una vez.

Con ello, vemos que al iniciar en una casilla blanca es imposible realizar el recorrido pedido, y por tanto la afirmación no es independiente de donde se inicie.

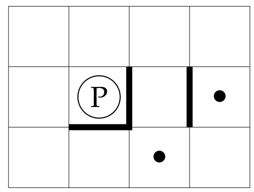
■

Una vez que entendíamos mejor el funcionamiento del hechizo, Nicolás decidió revisar los laberintos de forma más completa. Después de todo, en estos laberintos el hechizo no lo era todo, sino que también los **muros** dificultaban los movimientos.

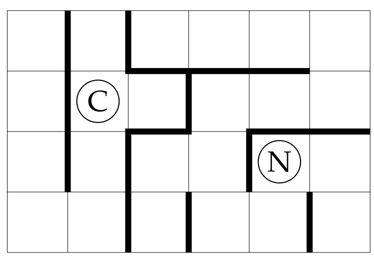
El funcionamiento de un muro es sencillo: bloquea el paso de una casilla a otra, restrigiendo así los movimientos que se pueden realizar. Representaremos los muros con líneas más gruesas que el cuadriculado que define las casillas. Por ejemplo, en el laberinto de la figura hay tres muros.



Dos de los muros restringen los movimientos de Patito: el muro abajo de él, y a la derecha de él. Así, Patito sólo se puede mover a la izquierda o hacia arriba. De este modo, Patito puede llegar solamente a las casillas marcadas con los puntos.



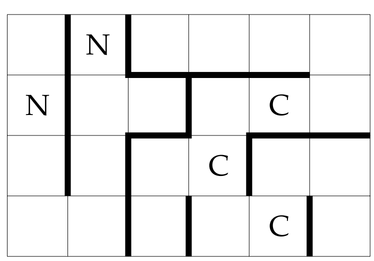
Problema 9. Camila y Nicolás se encuentran en el laberinto que se muestra a continuación.



Marque todas las casillas a las cuales pueden llegar Nicolás y Camila en un movimiento.

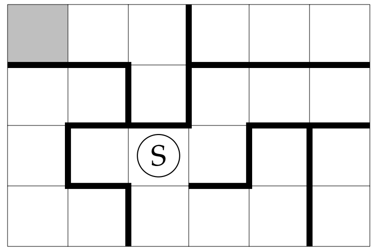
Básica: P5 (2 pts.) | Menor: No | Mayor: No

Solución. Hemos marcado con N las casillas a las que puede llegar Nicolás, mientras que con una C están marcadas las casillas a las que puede llegar Camila.



■

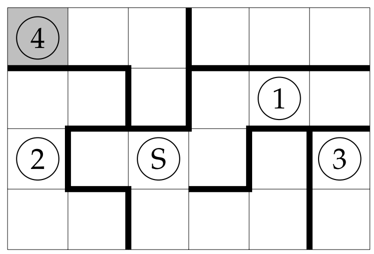
Problema 10. Stephanie se encuentra en el siguiente laberinto.



Encuentre un recorrido para que Stephanie llegue a la casilla gris.

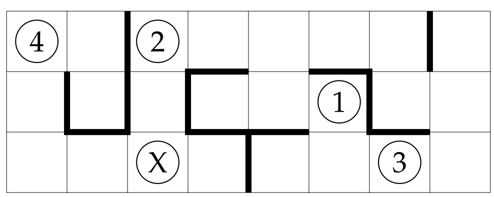
Básica: P6 (2 pts.)	Menor: P5 (2 pts.)	Mayor: No

Solución. A continuación vemos un recorrido con el cual Stephanie puede llegar a la casilla gris.



■

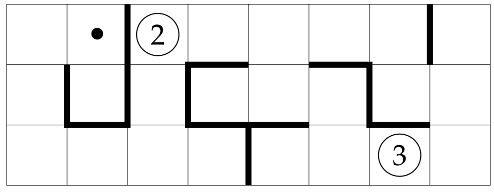
Problema 11. Una persona (cuyo nombre no diremos) afirma haber realizado el siguiente recorrido.



Sin embargo, al ver este recorrido, Nicolás le llamó la atención diciendo que lo que decía no era verdad. ¿Cómo supo Nicolás que la persona estaba mintiendo?

Básica: P7 (2 pts.)	Menor: No	Mayor: No

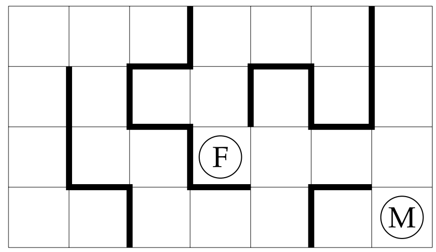
Solución. Fijémonos particularmente en el tercer movimiento. Para llegar a dicha posición, necesitamos que el movimiento sea desde 2 a la casilla inversa a 3. Sin embargo, entre estas casillas hay un muro, como podemos ver a continuación, en donde el punto señala la casilla inversa a 3.



De este modo el tercer movimiento no es posible. Fue así que Nicolás supo que el recorrido no era válido.

■

Problema 12. Francisca y Matías se encuentran en el siguiente laberinto, en las posiciones marcadas con F y M respectivamente.



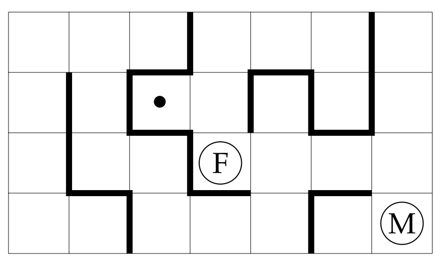
(a) `(-/1/1)` ¿Puede llegar Francisca a la casilla en la que se ubica Matías? Explique.

(b) `(-/1/1)` ¿Puede llegar Matías a la casilla en la que se ubica Francisca? Explique.

Básica: No | Menor: P6 (2 pts.) | Mayor: P5 (2 pts.)

Solución. Primero, vemos que Francisca no puede llegar a la casilla en la que está Matías. Para esto, notemos que debido a los muros, existen únicamente dos posibles movimientos.

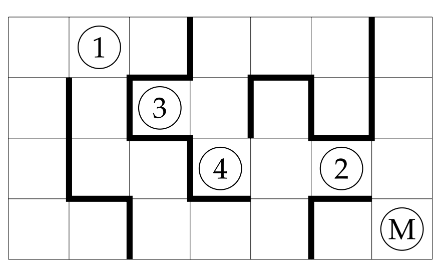
- Si Francisca se mueve hacia arriba, debido al hechizo ella volverá a su posición original.
- Si Francisca se mueve a la derecha, el hechizo la ubicará en la casilla marcada con un punto.



De este modo, debido a los muros deberá necesariamente moverse a la derecha, y así volverá a la posición original.

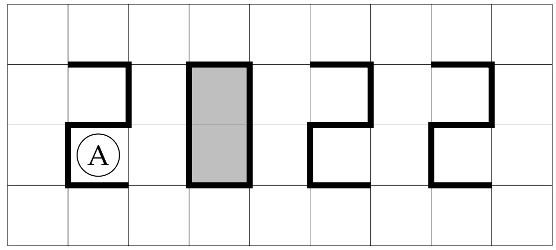
Como en todos los casos vuelve a la posición original sin haber llegado a la casilla en la que está Matías, concluimos que Francisca no puede llegar allá.

Por otro lado, Matías sí puede llegar a la casilla en la que se ubica Francisca, realizando por ejemplo la siguiente secuencia de movimientos.



■

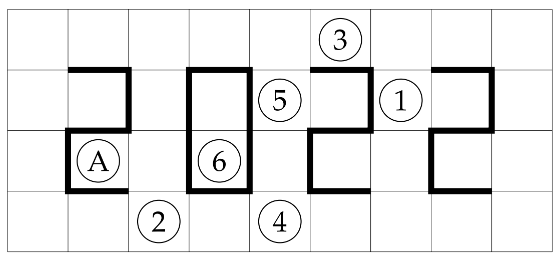
Problema 13. Alexis se encuentra en el siguiente laberinto, en la casilla marcada con una A.



¿Puede Alexis entrar al cero del 2022, esto es, a alguna de las dos casillas en gris? En caso de ser posible, muestre un recorrido que complete lo pedido; si no, muestre por qué.

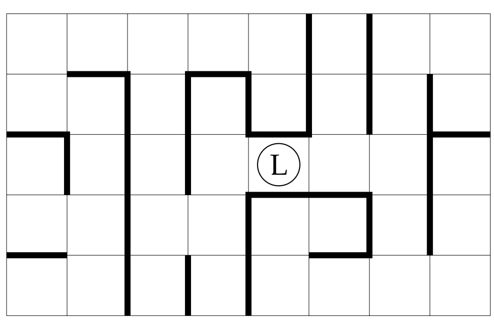
Básica: P8 (2 pts.)	Menor: No	Mayor: No

Solución. ¡Sí es posible! Un ejemplo se muestra a continuación.



■

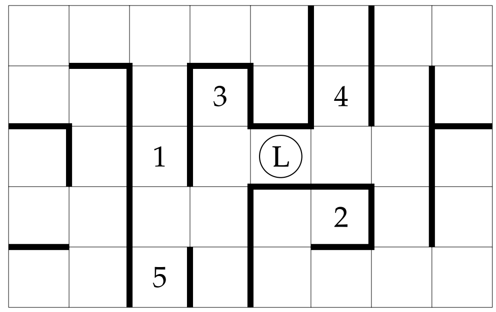
Problema 14. El profesor Labarca se encuentra en el siguiente laberinto, en donde su posición está marcada con una L.



¿Existe algún recorrido con el cual el profesor Labarca pueda llegar a alguna esquina? De existir, muestre un ejemplo; en caso contrario explique por qué.

Básica: No	Menor: No	Mayor: P6 (2 pts.)

Solución. Tal recorrido no existe. Para ver esto, nombremos algunas casillas y veamos las distintas posibilidades que tiene el profesor Labarca.



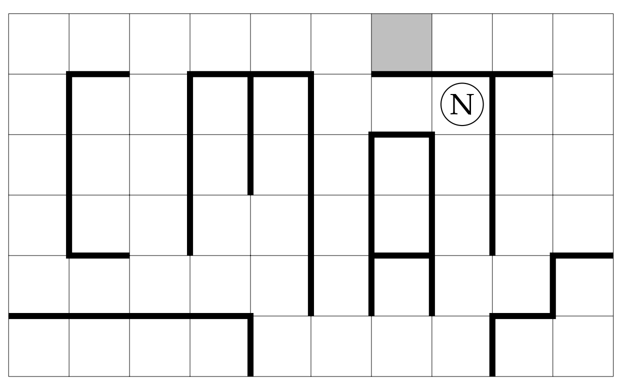
Si el profesor Labarca se mueve a la izquierda, el hechizo lo regresará a la casilla inicial. Por otro lado, si se mueve a la derecha, llegará a la casilla 1. A partir de aquí hay dos posibilidades.

- Si se mueve hacia arriba llegará a la casilla 2. Una vez aquí, debido a los muros no tiene más opción que moverse a la izquierda y llegar a 3. Desde 3, por los muros solo puede moverse hacia abajo, que lo hace llegar a la casilla inicial.
- Si se mueve hacia abajo llegará entonces a 4. Desde aquí, puede moverse hacia abajo o hacia arriba. En el primer caso, vuelve a la casilla 1. En el segundo caso, llega a 5, tras lo cual no existe otra opción que moverse hacia arriba, llegando nuevamente a 4.

De este modo, vemos que el profesor Labarca se moverá siempre entre la casilla inicial y las numeradas. Como ninguna de estas es una esquina, no existe dicho recorrido.

■

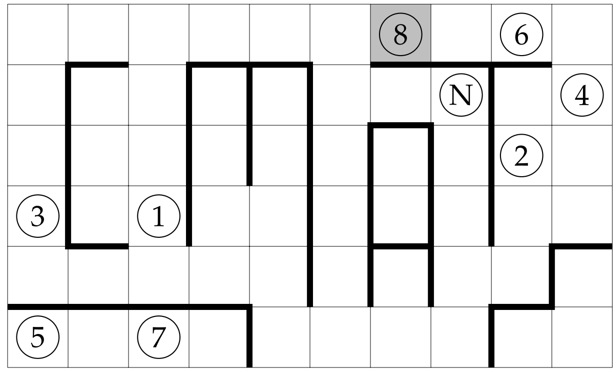
Problema 15. Mientras investigaba, Nabil se preguntó si alguno de estos laberintos tendría escrito CMAT en él. Ella empezó a buscar, muy emocionada por la idea. Después de un tiempo, tuvo la fortuna de encontrarse con el siguiente laberinto.



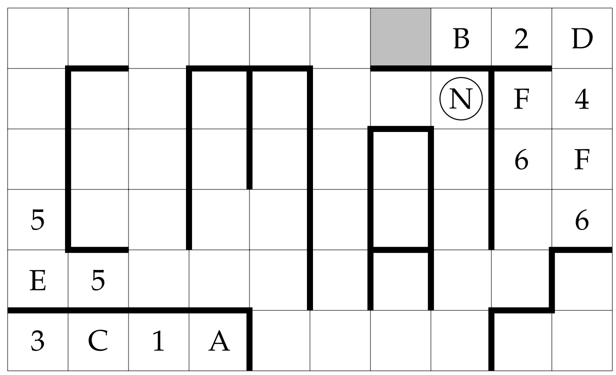
Nabil recorrió el laberinto, llegando a la casilla marcada con su inicial. Desde ahí, ¿cuál es la mínima cantidad de movimientos que debe realizar para llegar a la casilla gris?

Básica: No | Menor: P7 (3 pts.) | Mayor: P7 (2 pts.)

Solución. La mínima cantidad de movimientos es ocho. Veamos en primer lugar que Nabil puede llegar en dicha cantidad realizando el siguiente recorrido.



Luego debemos demostrar que no se puede llegar en menos pasos. Para esto, nombremos algunas de las casillas como sigue.



Para llegar a la casilla pedida Nabil debe moverse en dirección a A (por el hechizo). Por los muros, la única opción es que ella haya estado en 1, y desde ahí se mueva a la derecha.

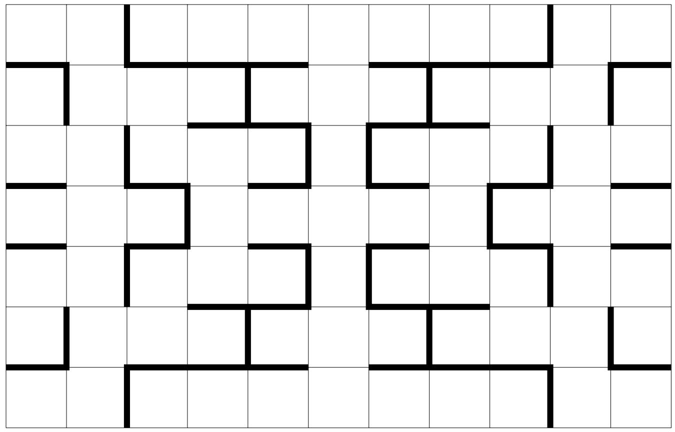
Del mismo modo, para llegar a 1 ella debe haberse movido en dirección a B, lo cual puede hacerse solo desde 2 y desde la casilla en gris. Como estamos intentando llegar a la casilla gris, podemos suponer que Nabil llegó a 2.

Repitiendo el argumento, Nabil debe haber llegado a 3, y antes de eso a 4. Ahora bien, para llegar a 4 ella debe haberse movido en dirección a E, lo cual solo puede hacerse desde una de las casillas marcadas con 5. Para llegar a ellas, solo puede hacerlo desde las casillas marcadas con 6.

Finalmente vemos que Nabil no puede llegar en un único movimiento a una casilla 6, por lo tanto necesita al menos $2 + 6 = 8$ movimientos. Esto demuestra que la mínima cantidad es 8 movimientos.

■

Problema 16. Sebastián encontró el siguiente laberinto.

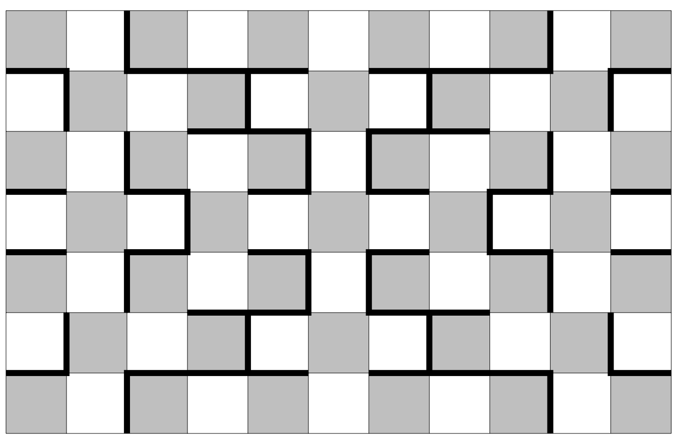


Muestre que en dicho laberinto, dadas dos casillas cualesquiera, siempre es posible llegar de una a la otra.

Básica: No | Menor: No | Mayor: P8 (3 pts.)

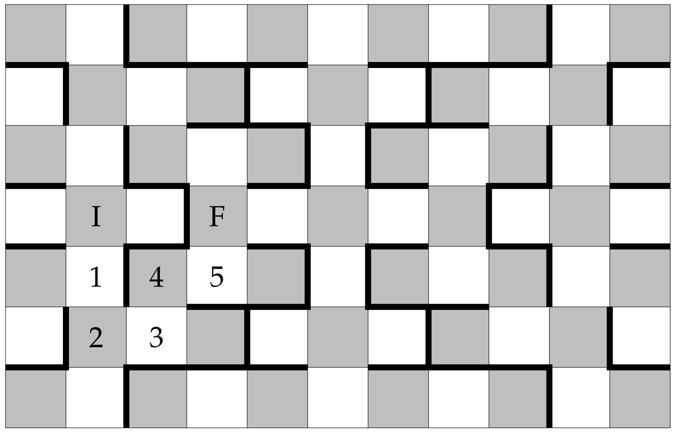
Solución. La idea básica es notar que el laberinto es simétrico, por lo que podemos construir el recorrido directamente en el laberinto original.

Comenzaremos coloreando el laberinto de manera alternada, como sigue.

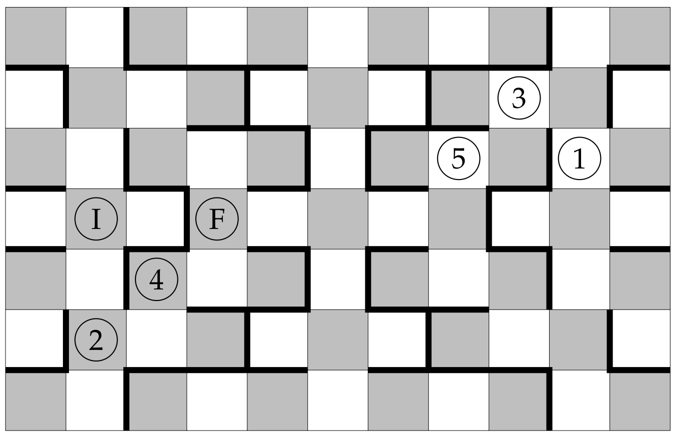


Llamemos I y F a las casillas inicial y final. Distinguiremos dos casos, dependiendo de si I y F están en casillas del mismo color.

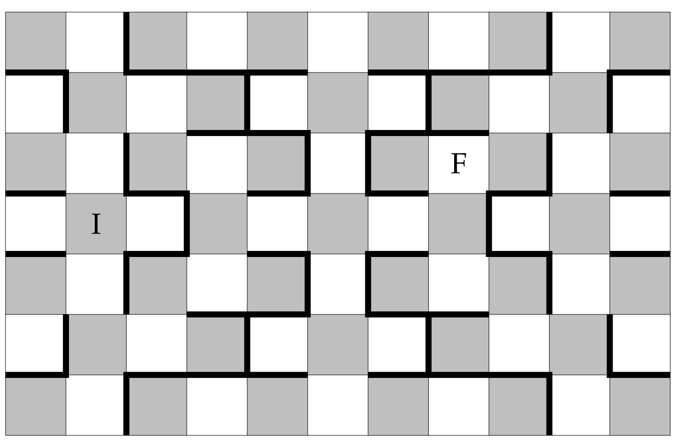
Supongamos primero que I y F están en casillas del mismo color. Escojamos un camino para llegar de una a la otra, ignorando el hechizo. Por ejemplo, una opción es la siguiente.



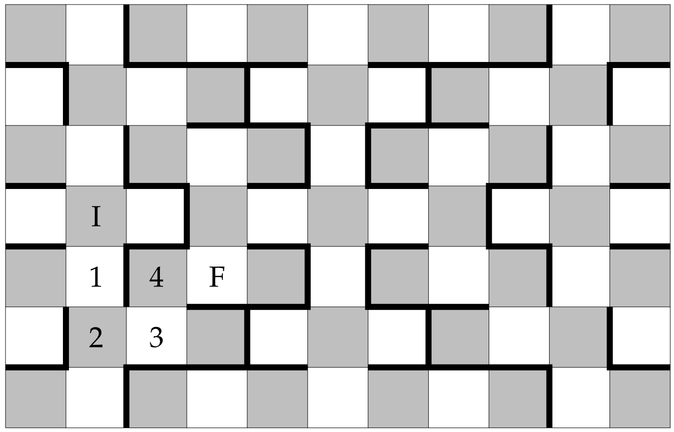
Con esto, armaremos un recorrido como sigue: reflejamos los números impares, y dejamos los pares (junto con I y F). Esto da un recorrido que cumple lo pedido.



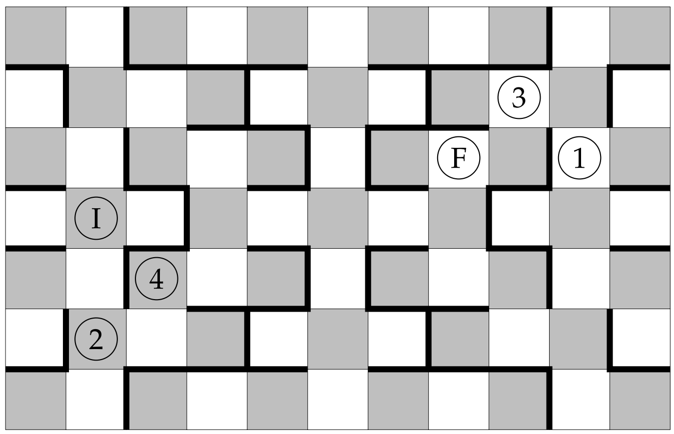
En el segundo caso, I y F están en casillas de distinto color.



En tal caso, comenzamos reflejando F y escogemos un camino de I a F.



Para concluir, reflejamos los números impares y las casilla F, que vuelve así a su posición original.



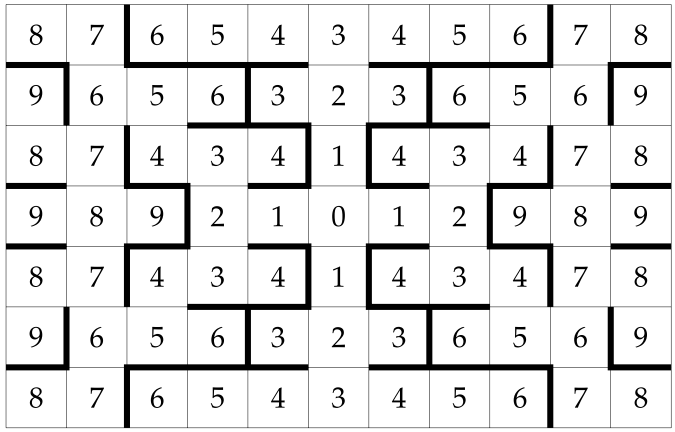
Por la simetría del laberinto, esto nos da un recorrido válido.

Solución alternativa. La estrategia es la siguiente. Primero demostraremos que si es posible llegar de X a Y, entonces es posible llegar de Y a X invirtiendo el recorrido. Segundo, probaremos que desde el centro del tablero podemos llegar a todas las casillas.

Como el laberinto es simétrico, si fuimos capaces de caminar desde una casilla X a una casilla Y, es porque entre las dos casillas no existía un muro. Luego, debido a la simetría, no puede existir un muro entre la inversa de X y la inversa de Y, pudiendo regresar el movimiento.

De este modo, si se tiene una cierta secuencia de movimientos, podemos deshacer cada movimiento y así devolvernos. Es decir, si existe un recorrido desde una casilla X a una casilla Y, existe otro desde una casilla Y a una casilla X.

Para la segunda parte, consideremos la siguiente clasificación de casillas.



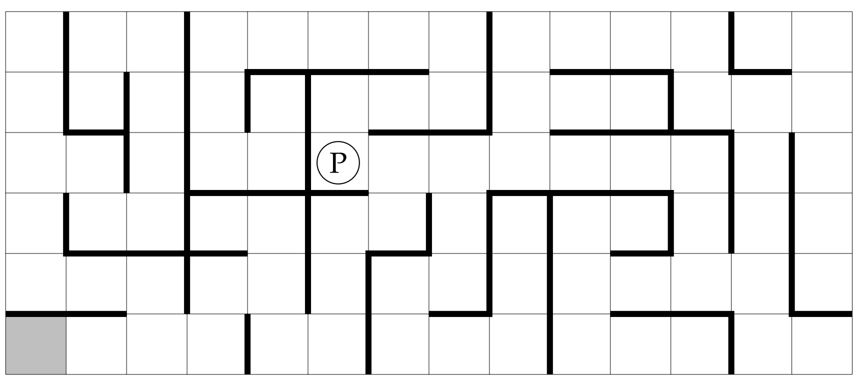
8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
9	6	5	6	3	2	3	6	5	6	9
8	7	4	3	4	1	4	3	4	7	8
9	8	9	2	1	0	1	2	9	8	9
8	7	4	3	4	1	4	3	4	7	8
9	6	5	6	3	2	3	6	5	6	9
8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8

Notemos que la clasificación es tal que casillas inversas poseen el mismo número. Además, desde todo número podemos movernos a uno con número menor. De este modo, si estamos en una casilla n, realizando n movimientos podemos llegar a la casilla 0, es decir el centro del laberinto.

Finalmente, si C es el centro del laberinto, como existe un recorrido de F a C existirá también uno desde C a F. Así, realizamos el recorrido de I a C y luego el de C a F, llegando de este modo desde nuestra casilla inicial a la casilla final.

■

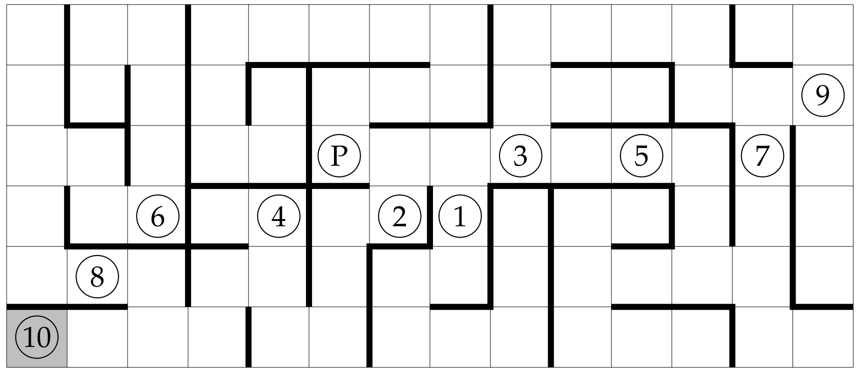
Problema 17. ¡Nicolás localizó a Patito! Se encuentra en el siguiente laberinto.



Muestre un recorrido con el cual Patito pueda llegar a la salida del laberinto, indicada con la casilla gris.

Básica: P9 (3 pts.) | Menor: No | Mayor: No

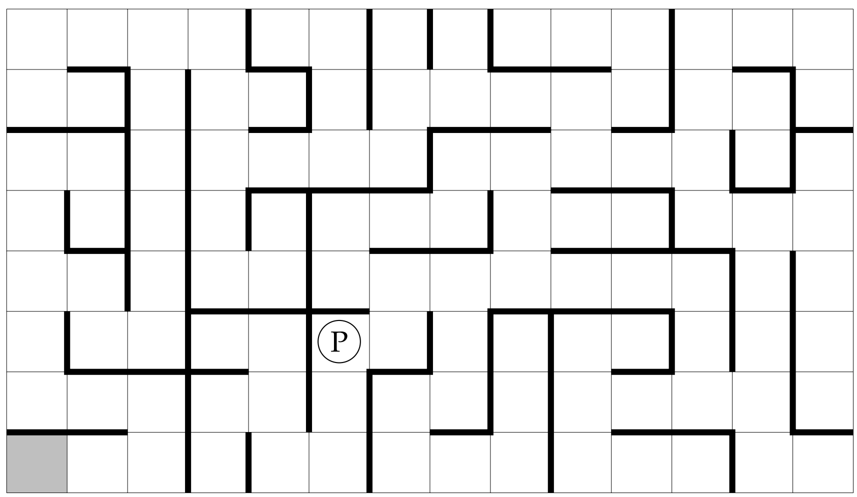
Solución. Una posible solución es la siguiente.



Con lo cual ¡hemos salvado a Patito!

∎

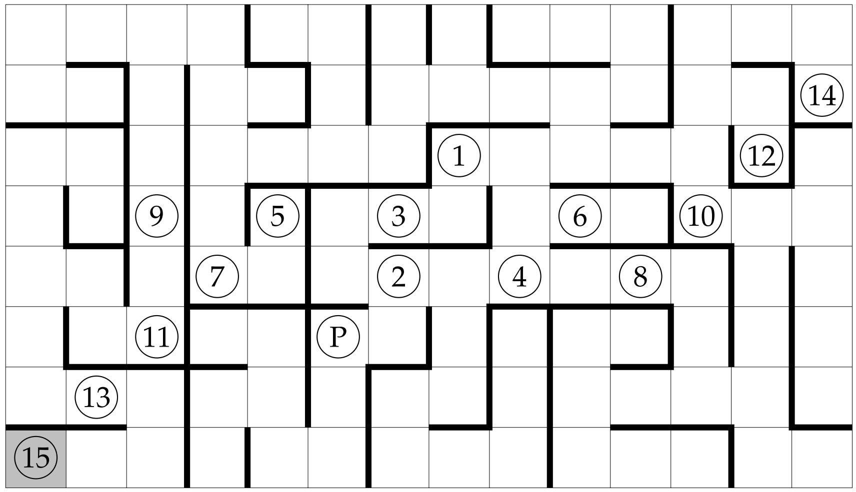
Problema 18. ¡Nicolás localizó a Patito! Se encuentra en el siguiente laberinto.



Muestre un recorrido con el cual Patito pueda llegar a la salida del laberinto, indicada con la casilla gris.

Básica: No | Menor: P8 (3 pts.) | Mayor: P9 (2 pts.)

Solución. Una posible solución es la siguiente.



Con lo cual ¡hemos salvado a Patito!

■

Preguntas por nivel

Pregunta	Básica	Menor	Mayor
1	1		
2	2		
3		2	2
4		3	2
5	3		
6		3	2
7	3	2	
8			3
9	2		
10	2	2	
11	2		
12		1(a)+1(b)	1(a)+1(b)
13	2		
14			2
15		3	2
16			3
17	3		
18		3	2