CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas XX

Quinta fecha
1 de octubre de 2022
Soluciones
Individual

Primer Nivel

1 El CMAT soccer es un deporte muy popular, cuya dinámica es igual a la del *fútbol* que conocemos: se enfrentan dos equipos en partidos, ganando el que logra anotar más goles en la portería contraria.
Su particularidad es su máximo torneo: la Patito League. En ella, los equipos compiten por obtener la mayor cantidad de puntos posibles para quedarse con la Patito Cup. Los puntos se obtienen de la siguiente manera: cada victoria **suma 4 puntos** al equipo ganador, los empates **suman 2 puntos** a ambos equipos y las derrotas **restan un punto** al perdedor.
Un cierto equipo X este año no ha tenido un buen rendimiento y teme quedar en último lugar: en los 7 partidos que ha disputado, apenas suma 3 puntos. Determine la cantidad de maneras posibles en las que dicho equipo pudo haber obtenido ese resultado en los 7 partidos, considerando solo el número de partidos ganados, perdidos y/o empatados (por tanto, no considere el orden en que se obtuvieron los resultados).

Solución

Sea V la cantidad de victorias obtenidas por X en los 7 partidos, E la cantidad de empates y D la de derrotas. Podemos notar que $D+E+V=7$, pues se juegan siete partidos. Obtenemos así la relación

$$V+E=7-D. \tag{1}$$

Además, los puntos de X pueden calcularse mediante la fórmula $4V+2E-D=3$. Así, observamos que

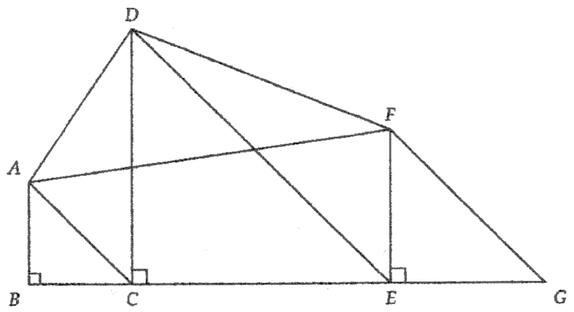
$$2V+E=\frac{3+D}{2}. \tag{2}$$

El lado derecho de (2) debe ser un número entero, por lo que D debe ser impar; así, $D=1,3,5,7$. Tenemos así cuatro casos: para cada uno de ellos, podemos calcular $V+E$ y $2V+E$ con (1) y (2), lo que al restar nos permite calcular V y E. Obtenemos así la siguiente tabla.

D	1	3	5	7
$V+E$	6	4	2	0
$2V+E$	2	3	4	5
V	-4	-1	2	5
E	10	5	0	-5

Concluimos entonces que solo hubo una manera en la que el equipo X obtuvo sus 3 puntos: 2 victorias, ningún empate y 5 derrotas.

2 La siguiente figura está formada por tres triángulos rectángulos isósceles, todos dibujados con uno de sus lados en la recta $\overleftrightarrow{BG}$: el $\triangle ABC$ tiene área $8\,\text{cm}^2$, el $\triangle DCE$ tiene área $50\,\text{cm}^2$, y el $\triangle FEG$ tiene área $18\,\text{cm}^2$. Calcule el área del triángulo $\triangle AFD$.



Solución

En primer lugar, podemos calcular la medida de los lados de los tres triángulos. Para el primero, tenemos que $\overline{AB}^2/2 = 8$ (al ser isósceles rectángulo), y así $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$. Similarmente, $\overline{CE} = \overline{CD} = 10\,\text{cm}$ y $\overline{DF} = \overline{DG} = 6\,\text{cm}$. De este modo, para calcular el área del triángulo $\triangle ADF$, calcularemos la del pentágono $ABEFD$, y le restaremos la del cuadrilátero $ABEF$. Para el pentágono, podemos separarlo en dos trapecios rectángulos: el $ABCD$ y el $DCEF$. Sus bases y alturas ya las calculamos (son lados de los triángulos rectángulos isósceles), y así

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{4+10}{2}\cdot 4 = 28\,\text{cm}^2, \qquad \text{Área}(DCEF) = \frac{10+6}{2}\cdot 10 = 80\,\text{cm}^2.$$

Así, el área del pentágono $ABEFD$ es de $28 + 80 = 108\,\text{cm}^2$. El trapecio $ABEF$ se calcula de manera similar, obteniendo

$$\text{Área}(ABEF) = \frac{4+6}{2}\cdot (4+10) = 70\,\text{cm}^2.$$

Obtenemos así que el área del triángulo $\triangle AFD$ es

$$\text{Área}(\triangle AFD) = \text{Área}(ABEFD) - \text{Área}(ABEF) = 108 - 70 = 38\,\text{cm}^2.$$

Segundo Nivel

1 Fernanda tiene un tablero de 3×3 que rellena con los números naturales del 1 al 9 (ambos incluidos) y sin que se repitan. Una vez ha rellenado el tablero, ella anota las sumas de los tres valores de cada columna, obteniendo tres valores. Por ejemplo, en el tablero de abajo Fernanda anota los valores 18, 16 y 11.

7	8	1
9	3	6
2	5	4

¿Es posible que haya dispuesto los números de tal manera que los tres valores anotados sean todos múltiplos de 9 y distintos entre sí?

Solución

No, no es posible. Para demostrar esto, supongamos que Fernanda sí pudiese disponer los números de dicha manera. Llamaremos $9a, 9b$ y $9c$ a los valores de las sumas de la primera, segunda y tercera columna respectivamente, donde a, b, c son números naturales.
Notemos que el número $9a + 9b + 9c$ corresponde a la suma de todos los números del tablero, es decir,

$$\begin{aligned} 9a + 9b + 9c &= 1 + 2 + \cdots + 9 = 45 \\ \implies a + b + c &= 5. \end{aligned}$$

Como $9a, 9b, 9c$ son distintos entre sí, entonces la suma $a + b + c$ es a lo menos $1 + 2 + 3 = 6$, lo cual contradice a la ecuación anterior. Concluimos que en efecto Fernanda no puede disponer los números como se solicita.
Solución alternativa. Supongamos que sí es posible. En tal caso, la menor columna debe sumar al menos 9, la segunda menor al menos $9 \cdot 2 = 18$, y la mayor $9 \cdot 3 = 27$. Ahora bien, el mayor valor que puede sumar una columna es $9 + 8 + 7 = 24$, lo que es una contradicción. De este modo, Fernanda no puede lograr lo buscado.

2 En honor a los 20 años del CMAT, el Profesor Labarca definió como *terna de CMAT* a toda lista de tres números naturales (p, q, r) que cumpla las siguientes condiciones:

- p, q y r son números primos,
- $r - q = q - p = 20$.

Encuentre todas las ternas de CMAT.

Solución

Notemos que $q = p + 20$ y $r = q + 20 = p + 40$ gracias a la segunda condición. Así, una terna de CMAT debe tener la forma $(p, p + 20, p + 40)$.
Luego, hay 2 posibilidades.

- Si $p = 3$, obtenemos la terna de CMAT $(3, 23, 43)$.
- Si $p \neq 3$, entonces p no puede ser un múltiplo de 3, al ser un número primo. De este modo, p es de la forma $3n + 1$ o $3n + 2$, para algún $n \geq 0$.

  En el primer caso, la lista tendría la forma $(3n + 1, 3n + 21, 3n + 41)$; en el segundo, tendrá la forma $(3n + 2, 3n + 22, 3n + 42)$. Ahora bien, tanto $3n + 21 = 3(n + 7)$ como $3n + 42 = 3(n + 14)$ son divisibles por tres (y distintos de 3), por lo que no pueden ser números primos. Este caso no aporta con ternas de CMAT.

De este modo, la única terna de CMAT es la lista $(3, 23, 43)$.

Tercer Nivel

1 Ayer y hoy han estado jugando en el parque un grupo de niñas y niños. Ayer la relación de niñas y niños era de 2 : 3. Hoy, el número de niños es el cuadrado del número de niñas y además hay 6 niños y 7 niñas menos que ayer. Contando a los niños y a las niñas, ¿Cuántos estuvieron jugando ayer?

Solución

Ayer jugaron $2k$ niñas y $3k$ niños. Hoy hay $2k - 7$ niñas y $3k - 6$ niños. Pero se tiene que

$$3k - 6 = (2k - 7)^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$3k - 6 = (2k - 7)^2$$
$$3k - 6 = 4k^2 - 28k + 49$$
$$4k^2 - 31k + 55 = 0$$
$$k = 5 \vee k = \frac{1}{2}$$

La única solución que nos sirve es $k = 5$. Entonces, ayer jugaron 25 niños y niñas.

2 Ricardo y Catalina están jugando en un tablero de 1×8, dividido en ocho casillas de 1×1, como se muestra en la figura.

Por turnos, y comenzando Catalina, escogen una casilla y anotan su inicial en ella. La única restricción es que no es posible escribir una inicial en una casilla ya escogida anteriormente, o en una adyacente a una ya escogida. Por ejemplo, si Catalina comienza anotando su inicial en la tercera casilla, Ricardo sólo tiene disponibles las casillas marcadas con un .

•		C		•	•	•	•

El primer jugador que no pueda hacer una jugada válida es declarado perdedor.
Describa una estrategia para Ricardo que le asegure la victoria.

Solución

Por simetría, podemos asumir que Catalina realiza su primera jugada en alguna de las cuatro primeras casillas. Describiremos qué debe hacer Ricardo en cada caso.

- Si Catalina comienza jugando en la primera casilla, Ricardo responde jugando en la quinta. Tenemos así la siguiente figura, donde hemos marcado con • las casillas disponibles.

C		•		R		•	•

  Ahora, Catalina tiene tres jugadas posibles: jugar en la tercera, séptima u octava casilla. De jugar en la séptima u octava, Ricardo gana jugando en la tercera; si Catalina juega en la tercera, Ricardo gana jugando en la séptima.

  Nota. Esta estrategia no es única; Ricardo podría haber jugado en la sexta casilla en vez de la quinta. Por simplicidad, omitiremos estas variantes de la estrategia.

- Si Catalina comienza jugando en la segunda casilla, Ricardo responde jugando en la sexta, como se observa en la siguiente figura.

	C		•		R		•

  Acá, Catalina juega usando una de las dos casillas, a lo que Ricardo responde usando la otra y gana.

- Si Catalina comienza jugando en la tercera casilla, Ricardo juega en la séptima, lo que nos da la siguiente situación.

•		C		•		R	

La situación es análoga al caso anterior: Catalina usa una de las casillas, Ricardo responde en la otra y gana.

- Si Catalina comienza jugando en la cuarta casilla, Ricardo responde jugando en la octava, que da la siguiente

•	•		C		•		R

La situación es simétrica al primer caso: si Catalina juega en alguna de las dos primeras casillas, Ricardo gana jugando en la sexta; si juega en la sexta, Ricardo gana jugando en la primera.

Esto muestra cómo Ricardo puede asegurar su victoria, para cualquier jugada de Catalina.

Cuarto Nivel

1 Martín tiene una pizarra, en la que escribe n números naturales (y al menos 3). Posteriormente, él calcula todas las sumas posibles que involucren dos de los números. Martín quiere que estas sumas terminen todas en dígitos distintos. ¿Para qué valores de n Martín puede lograr su objetivo?
Por ejemplo, Martín puede lograr su objetivo para $n = 3$: si en pizarra anota $1, 5, 7$, las sumas son

$$1 + 5 = 6, \quad 1 + 7 = 8, \quad 5 + 7 = 12.$$

Los tres dígitos finales (6, 8 y 12) son todos distintos.

Solución

Vamos a mostrar que $n = 3$ y $n = 4$ son los únicos dos valores para lo que esto es posible. Para ello, llamemos $a_1, \ldots, a_n$ a los n números. Notemos que hay $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sumas que involucran a dos de los números.

- Si $n \geq 6$, entonces hay
$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{6(6-1)}{2} = 15$$
sumas involucradas, por lo que alguno de los 10 posibles dígitos debe repetirse. Así, este caso no aporta con soluciones.

- Si $n = 5$, entonces hay
$$\frac{5(5-1)}{2} = 10$$
sumas involucradas. De este modo, las diez sumas
$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_2 + a_3, a_2 + a_4, a_2 + a_5, a_3 + a_4, a_3 + a_5, a_4 + a_5$$
deben terminar en los dígitos $0, 1, \ldots, 9$ sin repetir.
Ahora bien, si sumamos esas 10 sumas, obtenemos $4(a_1 + \cdots + a_5)$. Esto termina en el mismo dígito que $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$. Pero esto es una contradicción, pues el dígito del final debe ser par. Así, no hay soluciones con $n = 5$.

- Si $n = 4$, los números $1, 2, 3, 5$ permiten cumplir el objetivo. Y si $n = 3$, los números $1, 5, 7$ cumplen el objetivo.

De este modo, Martín puede cumplir su objetivo solo para $n = 3$ y $n = 4$.

2 Sea ABC un triángulo acutángulo y sea O su circuncentro. Suponga que $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ y OCA tienen la misma área. Pruebe que el triángulo es equilátero.
Observación: El circuncentro es el punto donde se intersecan las simetrales (o mediatrices) de cada uno de los lados de un triángulo. Y, una simetral de un segmento dado es la recta que es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio del mismo.

Solución

Llamemos D, E, F a los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y AB, y tracemos los segmentos OD, $\overline{OE}$ $\overline{OF}$. Ya que O es el circuncentro, estos segmentos son perpendiculares a los lados respectivos del triángulo.
Prestemos atención a los triángulos $\triangle OEA$ y $\triangle OAF$. Ambos tienen la misma área, pues

$$\text{Área}(\triangle OEA) = \frac{1}{2}\text{Área}(\triangle OCA), \qquad \text{Área}(\triangle OAF) = \frac{1}{2}\text{Área}(\triangle OAB).$$

Con ello, tanto $\triangle OEA$ y $\triangle OAF$ son rectángulos, comparten hipotenusa, y sus áreas son iguales. Esto fuerza que sus alturas hacia la hipotenusa midan lo mismo, y con ello $\triangle OEA$ es congruente a OFA o a $\triangle AFO$. El segundo no es posible, pues en tal caso $OEAF$ sería un rectángulo, y con ello $\angle BAC = 90°$.
Resulta así que $\angle BAO = \angle OAC$, y con ello AO es la bisectriz del $\angle BAC$. En particular, y usando que O es el circuncentro,

$$\angle BAO = \angle OAC \implies 90° - \angle ACB = 90° - \angle CBA \implies \angle ACB = \angle CBA.$$

El mismo análisis aplicado en el vértice B muestra que los tres ángulos del $\triangle ABC$ son iguales, y así el $\triangle ABC$ es equilátero.
Solución alternativa. Sean P la intersección de $\overline{OA}$ con $\overline{BC}$, Q la intersección de OB con $\overline{CA}$, y R la intersección de $\overline{OC}$ con AB.
Notemos que $\overline{AP}/\overline{OP} = 3$. En efecto, la condición sobre las áreas implica que el área del triángulo $\triangle ABC$ y la del $\triangle BCO$ están en razón $3:1$. Ya que ambos triángulos comparten base, las alturas desde A y desde O están también en razón $3:1$, y por Thales lo mismo ocurre con los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{OP}$.
Ahora bien, sabemos lo mismo para el baricentro G del triángulo: si D, E, F son los puntos medios de los lados BC, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, entonces $AD/\overline{GD} = 3$, y similar con las otras dos proporciones.
De este modo, resulta que G y O están en una paralela común a BC, y una paralela común a $\overline{CA}$. Así, $G = O$ deben ser el mismo punto.
Con ello, basta probar que si G y O coinciden, entonces el triángulo es equilátero. Para ver esto, notemos que $D = P$ por construcción, y así la transversal de gravedad desde A es perpendicular a $\overline{BC}$. Esto implica (por el teorema de Pitágoras) que $\overline{AB} = CA$. El mismo argumento aplicado desde B muestra que el tercer lado tiene la misma medida que los otros dos, y así $\triangle ABC$ es equilátero.
Solución alternativa 2. Llamemos D, E, F a los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, CA y $\overline{AB}$, y tracemos los segmentos $\overline{OD}$, OE $\overline{OF}$. Ya que O es el circuncentro, estos segmentos son perpendiculares a los lados respectivos del triángulo.
Por comodidad, llamemos $2a$, $2b$, $2c$ a las medidas de los lados $\overline{BC}$, CA, $\overline{AB}$, y d, e, f a las medidas de $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$. De este modo, la restricción de las áreas pasa a ser

$$\frac{2a \cdot d}{2} = \frac{2b \cdot e}{2} = \frac{2c \cdot f}{2} = \quad ad = be = cf = P.$$

Por otro lado, ya que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$ es el circunradio, por el teorema de Pitágoras resulta que

$$a^2 + d^2 = b^2 + e^2 = c^2 + f^2 = R^2.$$

De este modo, tenemos que a^2 y d^2 satisfacen $a^2 + d^2 = R^2, a^2d^2 = P^2$, y con ello a^2, d^2 son las raíces de la ecuación

$$x^2 - R^2x + P^2 = 0.$$

Lo mismo ocurre para el par b^2, e^2, y para el par c^2, f^2. Resulta así que $a^2 = b^2, d^2 = e^2$, o $a^2 = e^2, d^2 = b^2$ (y análogamente con las otras ecuaciones).
Para descartar la segunda opción, supongamos que $a^2 = e^2$, $d^2 = b^2$. Esto implica que $a = e, b = d$. Así, por criterio LLL tenemos que $\triangle ODC \cong \triangle CEO$. Esto implica que

$$\angle DCE = \angle DCO + \angle OCE = \angle DCO + \angle COD = 180^\circ - \angle ODC = 90^\circ,$$

pues $\overline{OD} \perp \overline{DC}$. Esto contradice que el $\triangle ABC$ es acutángulo.
Obtenemos con ello que $a^2 = b^2, d^2 = e^2$. Un argumento análogo ocurre con los otros dos pares, y así $a^2 = b^2 = c^2$. De este modo, $2a = 2b = 2c$, por lo que el $\triangle ABC$ es equilátero.