Nivel Menor (Soluciones)

Segunda fecha

06 de diciembre 2025

La cisterna

Problema 1. *Encuentre la cantidad de números naturales n, con $1 \leq n \leq 2025$ tales que el máximo común divisor entre n y 2025 es igual a 3.*

Solución. Como $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, la condición de que el máximo común divisor entre n y 2025 sea igual a 3 es quivalente a que se cumplan las siguientes condiciones:

- n debe ser múltiplo de 3.
- n no puede ser múltiplo de 9, pues en ese caso, el máximo común divisor sería al menos 9.
- n no puede ser múltiplo de 5, pues en ese caso, el máximo común divisor sería al menos 15.

Si n es múltiplo de 3, pero no de 9, entonces n debe dejar resto 3 o 6 al dividir por 9.

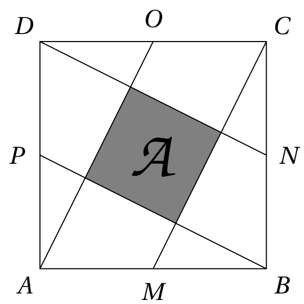
Los números que dejan resto 3 al dividir por 9 (es decir, los números 3, 12, 21, etc...) aparecen una vez cada 9 números, por lo que en total hay $\frac{2025}{9} = 225$ de ellos. Entre estos números, debemos descontar los que sean múltiplos de 5. El primero de ellos es 30. Como los números de la lista que tenemos se obtienen sumando 9 cada vez, no encontramos otro al sumar 9, ni 18, ni 27 ni 36, pues ninguno de esos números es múltiplo de 5. Pero al sumar 45 sí se obtiene un nuevo múltiplo de 5. Esto quiere decir que un quinto de los números de nuestra lista son múltiplos de 5, estos son un total de $\frac{225}{5} = 45$, por lo que la cantidad de números que dejan resto 3 al dividir por 9 y que no son múltiplos de 5 es igual a $225 - 45 = 180$.

El caso de los números que dejan resto 6 al dividir por 9 es similar, estos también aparecen uno cada 9 números, por lo que hay 225 de ellos. Del mismo modo, un quinto de ellos es múltiplo de 5, por lo que descontamos 45 y nos quedamos con 180.

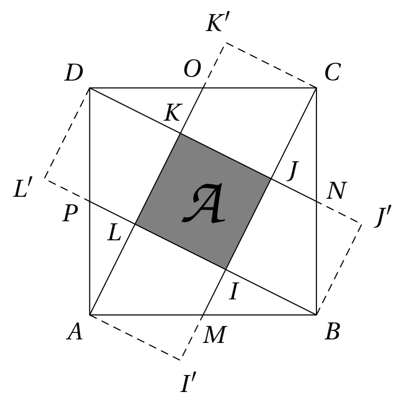
Finalmente el total de números que cumplen la condición es igual a $180 + 180 = 360$.

■

Problema 2. *En el cuadrado $ABCD$ de lado 1, se dibujan las líneas AO, BP, CM y DN, en que M, N, O y P son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente, resultando un cuadrado pequeño al interior. Si $\mathcal{A}$ es el área de este cuadrado, ¿Cuánto vale $\mathcal{A}$?*



Solución. Si completamos los cuadrados pequeños como en la figura, mostraremos que el cuadrado $ABCD$ esta formado por 5 cuadrados congruentes, por lo tanto $\mathcal{A} = \frac{1}{5}$



Para esto nos basta mostrar que

$$\triangle AI'M \cong \triangle BIM \qquad \triangle BJ'N \cong \triangle CJN \qquad \triangle CK'O \cong \triangle DKO \qquad \triangle DL'P \cong \triangle ALP$$

veremos que es cierto solo para $\triangle AI'M \cong \triangle BIM$ y los otros serán análogos.

En efecto, $\angle AMI' = \angle BMI$ al ser opuestos por el vértice y $\angle MI'A = 90° = \angle MIB$, por lo que $\angle I'AM = IBM$. Lo anterior junto a $AM = MB$ resultan en suficiente para tener el criterio Lado-Ángulo-Lado de congruencia.

■

Problema 3. *Considere el siguiente número* $n = 123456789101112..,10000$ *que resulta de poner todos los números desde el 1 al 10000 uno al lado del otro. ¿Qué dígito ocupa la posición 2025 de izquierda a derecha?*

Solución.

- Los números del 1 al 9 ocupan una posición cada uno, cubriendo las 9 primeras posiciones.
- Los números del 10 al 99 ocupan dos posiciones cada uno, cubriendo en total $90\times2=180$ posiciones que van desde la 10 hasta la 189.
- los números del 100 al 999 ocupan tres posiciones cada uno, entre el 100 y el 699 ocupan $600\times3=1800$ posiciones que van desde la 190 hasta la 1989. Desde aquí, sólo resta avanzar 2025-1989=36 posiciones, eso es equivalente a 12 números, desde el 700 al 711. Como la división es exacta, el último dígito del 711, es decir, el 1 es el que ocupa la posición 2025.

■