Primer Torneo Comunal
El Número de Oro 2023
25 de Noviembre 2023 La Cisterna

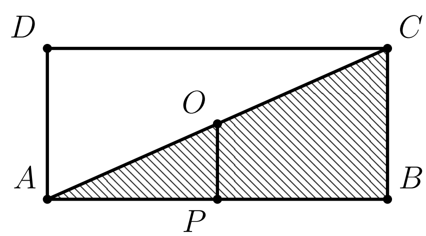
Nivel Menor

P1: Juan visita un pueblo compuesto por personas que conformaban la caballería; quienes siempre dicen la verdad, y personas dedicadas a la artesanía; quienes tenían mala fama de siempre mentir. Juan interroga a un grupo de cuatro habitantes y deja anotado el siguiente apunte.

- Luis asegura que Carlos es un artesano.
- Marta declara que entre Luis y Pedro hay al menos un artesano.
- Carlos pretende ser el único en la caballería en el grupo.
- Pedro sostiene que los cuatro son parte de la caballería.

¿Cuántas personas de las interrogadas por Juan son de la caballería?

P2: En el rectángulo $ABCD$ se dibuja la diagonal $\overline{AC}$. Se dibuja también el segmento $\overline{OP}$, de manera que O sea el punto medio den AC, P en AB y que $\angle OPA$ sea de $90°$. Por último, se ennegrece el interior del triángulo ABC como se muestra en la figura.



Se sabe además que el área del triángulo APO vale 7cm^2. ¿Cuál es la medida del área del triángulo ABC?

P3: Se tienen 3 dígitos distintos T, N y O ninguno igual a 0 que cumplen la siguiente operación.

$$\begin{array}{cccc} & & & O \\ & & N & O \\ & T & N & O \\ + & T & N & O \\ \hline & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

¿Cuánto vale $T \cdot N \cdot O$?

Soluciones

P1: Notemos primero que Pedro es un artesano; si fuese un caballero diría la verdad, lo que significa que es verdad que el grupo esta formado solo por miembros de la caballería, sin embargo en particular Marta afirma que hay al menos un artesano entre ellos, lo que no puede ser verdad.

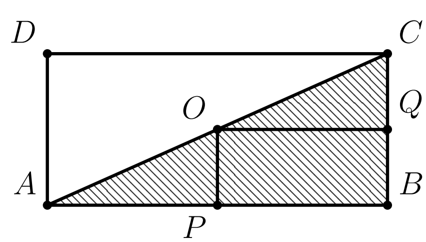
Lo siguiente que podemos deducir es que Marta es caballera; si fuese artesana, entonces lo que diría sería mentira, sin embargo ella afirma que entre Luis y Pedro hay al menos un artesano y ya hemos confirmado que Pedro es artesano.

Ahora, notemos que Carlos es artesano; la afirmación que hace es que no hay nadie en la caballería a parte de él mismo, sin embargo ya hemos confirmado que Marta lo es.

Por último, Luis es un caballero, pues afirma que Carlos es un artesano tal y como ya hemos confirmado.

Así, en el grupo interrogado hay 2 miembros de la caballería.

P2: Sea Q un punto en $\overline{BC}$ tal que $\angle QOP$ sea de 90°. Así, obtenemos el rectángulo $OPBQ$ y al triángulo rectángulo OQC rectángulo en Q. Notemos que entonces el área que queremos saber es el total de sumar las áreas del triángulo APO y de las otras dos figuras antes mencionadas.



Sabemos por enunciado que $\frac{1}{2}|AP|\cdot|OP|= 7\text{cm}^2$ de la formula de la mitad de medida de la base por la altura para el área de triángulos. Así, como P punto medio de $\overline{AB}$, tenemos que $|PB|=|AP|$ y por tanto podemos calcular el área del rectángulo $OPBQ$ como sigue.

$$\mathcal{A}(OPBQ) = |PB|\cdot|OP| = (2\cdot\frac{1}{2})\cdot|AP|\cdot|OP| = 2\cdot(7\text{cm}^2) = 14\text{cm}^2$$

Por último, basta ver el área de OQC. Para ello notemos que $|QC|=|OP|$. En esta solución, recordaremos que O es punto medio de $\overline{AC}$, por lo que $|AO|=|OC|$. Así, usando el teorema de Pitágoras y reemplazando valores, tenemos lo siguiente.

$$|QC|^2=|OC|^2-|OQ|^2=|AO|^2-|PB|^2=|AO|^2-|AP|^2=|OP|^2.$$

Como son ambas medidas positivas, tenemos la igualdad.

NOTA: lo anterior también puede ser mostrado por paralelismo o por congruencia.

Ya habiendo mostrado que $|QC|=|OP|$, calculamos el área de OCQ.

$$\mathcal{A}(OCQ) = \frac{1}{2}|CQ|\cdot|OQ|= \frac{1}{2}|OP|\cdot|AP|= 7\text{cm}^2.$$

Así, el área del triángulo CAB es $(7+14+7)\text{cm}^2 = 28\text{cm}^2$.

P3: Sabiendo la posibilidad de haber reservas en la sumas, llamemos a estas como r y s. Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} s + 2T &= 8 \\ r + 3N &= 8 + 10s \\ 4O &= 8 + 10r \end{aligned}$$

Se puede proseguir en el trabajo de las ecuaciones en algún otro orden, pero el que propondremos en esta solución es desde la primera hasta la última.

Notemos que s solo puede ser 0 o 2; reordenando la primera ecuación, sabemos que s es par y como es una reserva de las decenas, sabemos que no puede ser mayor que 3.

Luego, mirando la segunda ecuación, notamos que si s es 0, entonces r solo puede ser 2; dado que reordenando la ecuación notamos que es de la forma $3k+2$ y al ser reserva de las unidades debe ser menor que 4. Por otra parte, si s es 2, r es de la forma $3k+1$, por lo que solo puede ser 1.

Finalmente, mirando la última ecuación, tenemos que r es 2; si $r=1$, entonces se pide que O resuelva $4O = 18$ que no tiene solución.

Ya teniendo que $s=0$ y $r=2$ podemos concluir. El dígito O resuelve que $4O = 28$, por lo que O es 7. El dígito N resuelve que $3N = 6$, por lo que N es 2. y por último T resuelve que $2T = 8$, por lo que $T = 4$. Así, $T \cdot N \cdot O = 4 \cdot 2 \cdot 7 = 56$.