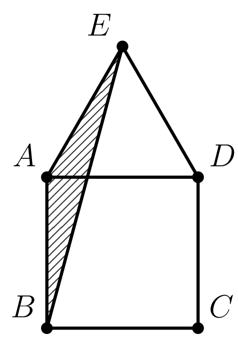
Primer Torneo Comunal
El Número de Oro 2023
25 de Noviembre 2023 La Cisterna

Nivel Mayor

P1: Bruno sube los escalones del Metro de uno en uno o de dos en dos, pero por su propia seguridad decide nunca ir de tres en tres. Él quiere que subir una escalera de la Estación La Cisterna que tiene 10 escalones de manera que obligadamente pise el descanso que está en el sexto escalón. ¿De cuántas maneras diferentes puede conseguir subir los 10 escalones?

P2: Fernanda está buscando números de seis dígitos que estén compuestos por los números del 1 al 6 -sin repetir - que cumplan que cuando se tomen sus k primeros dígitos, el número formado por ellos sea un múltiplo de k. ¿Cuántos números cumplen lo anterior?

P3: La siguiente figura compuesta por el cuadrado $ABCD$ y el triángulo equilátero ADE tiene área 208cm^2. ¿Cuál es la medida del área del triángulo ABE?



Soluciones

P1: Notemos que este problema se puede separar en dos subproblemas; en uno hay que contar cuantas maneras hay de llegar al sexto escalón y en otro hay que contar la cantidad de maneras que hay para saltar 4 escalones que son para llegar desde el sexto escalón hasta el décimo. Así, una vez resuelto cada subproblema, el conteo será el producto de los dos conteos anteriores; pues cada manera de subir 10 escalones con la restricción dada es una combinación entre subir 6 escalones y luego 4.

Partamos contando la cantidad de maneras que hay para subir 6 escalones. Estos pueden ser contados a mano siguiendo algún orden como la cantidad de saltos de dos en dos que hay. Así, con la siguiente notación describimos dichos saltos.

$$(111111) \quad (11112) \quad (11121) \quad (11211) \quad (12111) \quad (21111)$$

$$(1122) \quad (1212) \quad (2112) \quad (2121) \quad (1221) \quad (2211) \quad (222)$$

Ahora, Para el caso de 4 escalones tenemos los siguientes casos.

$$(1111) \quad (112) \quad (121) \quad (211) \quad (22)$$

Así, tenemos en total $13 \cdot 5 = 65$.

NOTA: esto también puede ser contado por combinatoria, resultando que para N escalones, la cantidad de maneras son $\sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N-k}{k}$

P2: Primero, sabemos que al tener un solo dígito, el número resultante será divisible por 1, por lo que el primer dígito debe necesariamente ser 1. De manera similar, el quinto debe ser 5 al no poder ser 0. Así, hasta ahora sabemos que los números que se buscan deben tener la siguiente forma.

$$1 * * * 5 *$$

Continuando, notemos que cortar una cantidad par de dígitos implica que el número debe ser un múltiplo de un múltiplo de dos, por lo que deben terminar en un número par, así, salvo el tercer dígito, todos los restantes deben ser pares, y deducimos que el tercer dígito debe ser el impar restante, que es 3.

$$1 * 3 * 5 *$$

Ya terminando, el segundo dígito debe cumplir que al tomar los tres primeros de algo que sea divisible por 3, así entonces la única posible solución es un número par de la forma $3k + 2$. Con eso en mente, notamos que solo 2 satisface esto.

$$123 * 5*$$

Por último, al tomar los primeros cuatro dígitos, como el penúltimo de estos es un 3, necesitamos que el siguiente sea 2 o 6. Con el 2 ocupado, solo puede ser 6. Así el último dígito restante debe ser 4 y encontramos el siguiente número que resulta ser solución única.

$$123654$$

P3: Si L es la medida del lado del cuadra, notemos entonces que el área achurada tiene como base el lado $\overline{AB}$ y como altura la mitad del lado, así por formula tenemos un área de $\frac{1}{2}L^2$.

Ahora, por teorema de Pitágoras, la altura de un triángulo equilátero de lado L mide $\frac{L}{2}\sqrt{3}$, y por tanto el área es de $\frac{L^2}{4}\sqrt{3}$. Entonces el área total en función del lado L es de $L^2(1 + \frac{1}{4}\sqrt{3})$

Concluimos así que la medida del lado es la siguiente.

$$\frac{1}{2}L^2 = \frac{1}{2}\frac{208}{1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}} = 32(4 - \sqrt{3}).$$