Nivel Menor (Solucionario)

Primera fecha

18 de noviembre de 2023

Problema 1. *Sean x, y números reales tales que*

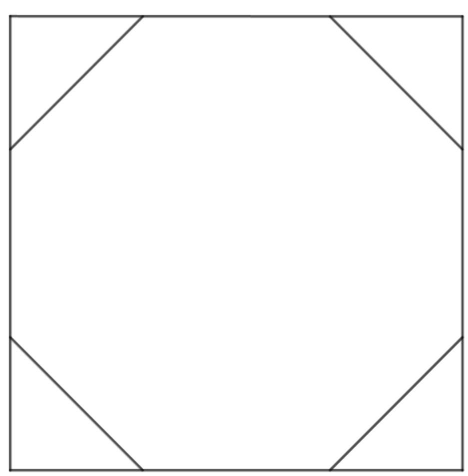
$$x + y = 13$$
$$xy = 5$$

calcule el valor del número

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Problema 2. *Encuentre todos los ordenamientos de los dígitos del 1 al 4 de tal forma que el número resultante sea divisible por 11*

Problema 3. *En la figura se observa un octágono regular inscrito en un cuadrado de lado 1. Calcule el área del octágono*



Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

Dividiendo la primera ecuación en la segunda obtenemos

$$\frac{13}{5} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Problema 2

Recordemos que un número es divisible por 11 si y sólo si la suma alternada de sus dígitos lo es. Como $1+2+3+4 = 10 < 11$ esto implica que queremos que la suma alternada de los dígitos sea 0. Notemos que el 4 y el 3 deben tener signos distintos, ya que de lo contrario la suma es demasiado grande para contrarrestarla con el 1 y el 2. Luego, su suma es ± 1, por lo que el 1 debe tener el mismo signo que el 4 y el 2 el mismo signo que el 3, y de hecho con esto basta, luego, las opciones son

$$4312, 4213, 1342, 1243, 2134, 2431, 3124, 3421$$

Problema 3

Sea s el lado del octágono. Tenemos por Pitágoras que

$$\left(\frac{1-s}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-s}{2}\right)^2 = s^2 \implies \frac{s^2}{2} + s - \frac{1}{2} = 0$$

luego, por la fórmula cuadrática

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1/2)}}{2 \cdot 1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

como $s > 0$ tenemos

$$s = \sqrt{2} - 1$$

luego, si a es el lado de cada triángulo rectángulo que se forma en las esquinas, sabemos que

$$a = \frac{1-s}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego, el área del octágono es

$$1 - 4 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = 1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\sqrt{2} - 2$$