Nivel Mayor (Solucionario)

Primera fecha

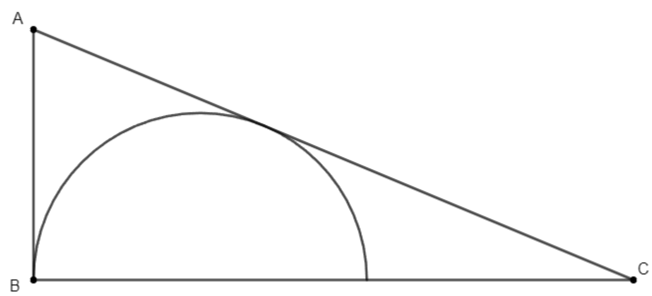
18 de noviembre de 2023

Problema 1. *Sea $n \geq 1$ un número entero. Muestre que el número*

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

siempre es un cuadrado perfecto

Problema 2. *En el siguiente dibujo, $\angle ABC = 90°$, $AB = 5$ y $BC = 12$. Calcule el radio de la semicircunferencia*



Problema 3. *En una mesa circular de 5 puestos, cada puesto está asignado al embajador de un país, de entre Argentina, Brasil, Chile, Dinamarca y España. Sin embargo, cuando estos llegan, no se dan cuenta de esto y se sientan de tal forma que ninguno de los embajadores está en su respectivo puesto. Muestre que se puede hacer que todos los embajadores se muevan una misma cantidad de puestos en sentido horario, de tal forma que al menos dos de ellos queden sentados en el puesto que les corresponde*

Tiempo: 3 hrs.

Soluciones

Problema 1

Notemos que

$$\begin{aligned}
n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\
&= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\
&= (n^2+3n+1)^2
\end{aligned}$$

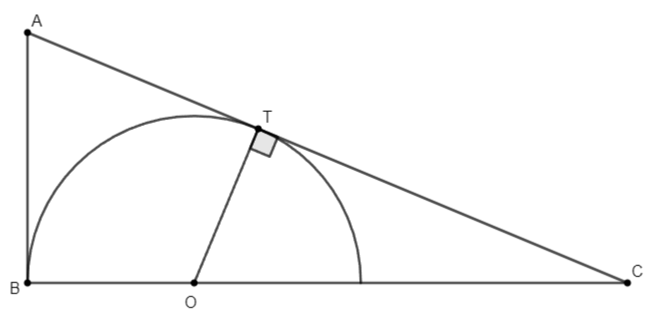
Problema 2

Solución 1. Por Pitágoras $AC = 13$. Sea T el punto de tangencia de la circunferencia. Notemos que como AT y AB son tangentes, tenemos $AT = AB = 5$ por lo que $TC = 8$. Luego, si O es el centro de la circunferencia sabemos que $OT \perp AC$, por lo que por Pitágoras

$$OT^2 + TC^2 = OC^2 = (12 - OB)^2$$

como OT, OB son radios, tenemos $OT = OB = r$, reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
r^2 + 64 &= (12 - r)^2 \\
r^2 + 64 &= 144 - 24r + r^2 \\
24r &= 80 \\
r &= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$



□

Solución 2. Por Pitágoras $AC = 13$. Reflejamos el triángulo con respecto a la recta BC obteniendo el $\triangle AB'C$. Por un lado,

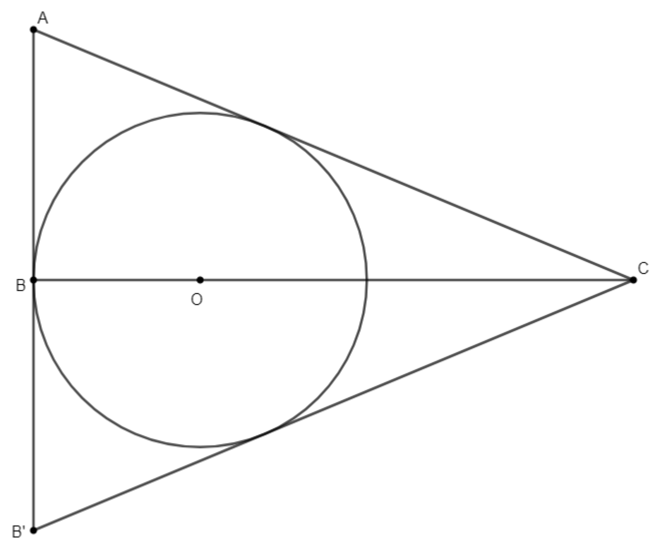
$$[\triangle AB'C] = \frac{AB' \cdot BC}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$$

mientras que por otro lado, el área de un triángulo es el semiperímetro por el inradio, por lo tanto

$$[\triangle AB'C] = \frac{AB' + B'C + AC}{2} \cdot r = \frac{10 + 13 + 13}{2} \cdot r = 18r$$

igualando ambas ecuaciones se obtiene

$$r = \frac{10}{3}$$



□

Problema 3

Denotemos por A, B, C, D, E los respectivos países. Y sean $d(A), d(B), d(C), d(D), d(E)$ la cantidad de puestos que necesitan moverse A, B, C, D, E respectivamente, en sentido horario para quedar en su puesto correcto. Notemos que

$$d(A), d(B), d(C), d(D), d(E) \in \{1, 2, 3, 4\}$$

ya que no pueden estar a más de 4 de distancia, y por enunciado sabemos que no están en el puesto que les corresponde. Como son 5 números en un conjunto de 4 elementos; debe haber dos de esas distancias que coincidan. Moviéndolos a todos esa cantidad de puestos, quedan al menos dos sentados en su lugar correspondiente.