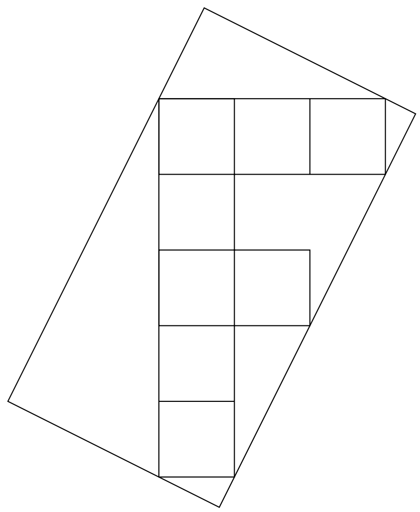
Nivel Mayor (Soluciones)

Segunda fecha

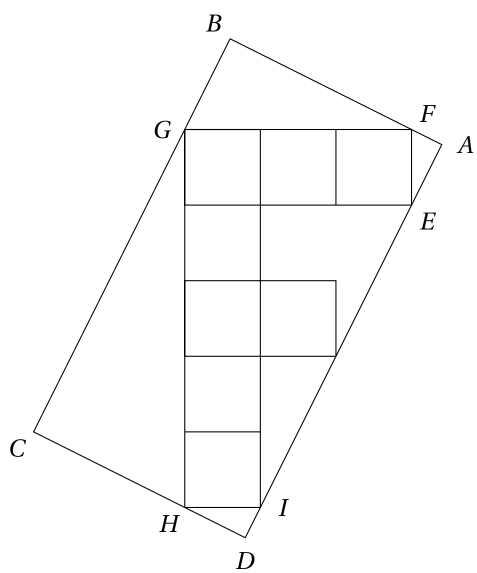
06 de diciembre 2025

La cisterna

Problema 1. *En la figura hay una F formada por cuadrados y que está inscrita en un rectángulo. ¿Qué fracción del área del rectángulo es usada por la F?*



Solución.



Como el triángulo EAF es rectángulo en A, entonces $\angle AEF + \angle AFE = 90°$, pero como el ángulo $\angle EFG$ es recto, se cumple que $\angle AFE + \angle GFB = 90°$, por consiguiente, $\angle AEF = \angle GFB$. Además $\angle EAF = \angle FBG = 90°$, concluimos entonces que los triángulos $\triangle AEF$ y $\triangle BFG$ son semejantes. Por un argumento similar, obtenemos que los triángulos $\triangle CGB$ y $\triangle DHI$ son también semejantes a los dos primeros. Si llamamos $\overline{EA} = a$, $\overline{AF} = b$ y $\overline{FE} = c$, comparando las hipotenusas de los triángulos semejantes usando los cuadrados de la F como escala obtenemos las siguientes medidas: $\overline{FB} = 3a$, $\overline{BG} = 3b$, $\overline{GC} = 5a$, $\overline{CH} = 5b$, $\overline{HD} = a$.

Como $ABCD$ es un rectángulo, los lados opuestos miden lo mismo, en particular $\overline{AB} = \overline{CD}$, es decir, $b + 3a = 5b + a$ de donde se deduce que $a = 2b$.

Con lo anterior podemos calcular los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en términos de b, en concreto: $\overline{AB} = b + 3a = 7b$ y $\overline{BC} = 3b + 5a = 13b$, por lo que el área del rectángulo $ABCD$ es igual a $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 7b \cdot 13b = 91b^2$.

El área de la F es igual al área de los 8 cuadrados que la conforman, como son todos iguales y el lado $\overline{FE} = c$, el área total de la F es $8c^2$. Finalmente, como el triángulo $\triangle AFE$ es rectángulo en A, por teorema de pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2 = (2b)^2 + b^2 = 4b^2 + b^2 = 5b^2$, así que podemos reescribir el área de la F como $40b^2$, por lo que la fracción del área que usa la F es igual a $\frac{40}{91}$.

$\blacksquare$

Problema 2. *Sean a, b, c números reales positivos tales que satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c} &= 7 \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} &= 17 \\ a+b+c &= 113 \end{aligned}$$

Calcule el valor del producto $a \cdot b \cdot c$.

Solución. Elevando al cuadrado la segunda ecuación obtenemos lo siguiente:

$$a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right) = 17^2 = 289$$

Ahora reemplazamos el valor de la tercera ecuación para obtener:

$$113+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right) = 289 \Longrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} = \frac{289-113}{2} = 88$$

Siguiendo un procedimiento análogo, elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+2\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{bc}+\sqrt[4]{ac}\right) = 7^2 = 49$$

Esta vez remplazamos el valor de la segunda ecuación:

$$17+2\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{bc}+\sqrt[4]{ac}\right) = 49 \Longrightarrow \sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{bc}+\sqrt[4]{ac} = \frac{49-17}{2} = 16$$

Elevamos al cuadrado una vez más esta última expresión, lo que resulta en:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+2\left(\sqrt[4]{a^2bc}+\sqrt[4]{ab^2c}+\sqrt[4]{abc^2}\right) = 16^2 = 256$$

Reemplazamos $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ por el valor que habíamos encontrado, es decir, 88, con ello se llega a la siguiente expresión:

$$88+2\left(\sqrt[4]{a^2bc}+\sqrt[4]{ab^2c}+\sqrt[4]{abc^2}\right) = 256 \Longrightarrow \sqrt[4]{a^2bc}+\sqrt[4]{ab^2c}+\sqrt[4]{abc^2} = \frac{256-88}{2} = 84$$

Finalmente extraemos el factor común $\sqrt[4]{abc}$ del lado derecho y reemplazamos el valor de la primera ecuación:

$$\sqrt[4]{a^2bc}+\sqrt[4]{ab^2c}+\sqrt[4]{abc^2} = \sqrt[4]{abc}\underbrace{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}\right)}_{7} = 84 \Longrightarrow \sqrt[4]{abc} = \frac{84}{7} = 12$$

De donde se concluye que $a \cdot b \cdot c = 12^4$.

■

Problema 3. *En la celebración de halloween, 2025 estudiantes (enumerados del 1 al 2025) salieron a pedir dulces. Para que fuese realmente aterrador, fueron a pedirle dulces al barrio donde viven todos los profesores de matemáticas, los cuáles, curiosamente también son 2025. En la primera casa les dan un dulce a cada uno de los estudiantes. En la segunda casa les dan un dulce, pero sólo a los estudiantes cuyo número es par. En la tercera casa les dan un dulce, pero sólo a los estudiantes cuyo número es múltiplo de 3. Siguen así, hasta que en la última casa, sólo el estudiante con el número 2025 recibe un dulce. ¿Cuántos estudiantes reciben una cantidad par de dulces?*

Solución. Notemos que cada estudiante recibe una cantidad de dulces igual a la cantidad de divisores que tenga su número. Por ejemplo, el niño número 6 recibe dulces en las casas número 1, 2, 3 y 6. En total 4 dulces. De este modo, la pregunta es equivalente a encontrar la cantidad de números entre 1 y 2025 tal que tengan una cantidad par de divisores.
Si un número n es el producto de dos números a y b, entonces a y b son divisores de n, por lo que para cada forma en la que se pueda escribir n como producto de dos números distintos se agregan 2 divisores a la cuenta total. Esto significa que si no es posible escribir a n como el producto de dos números iguales (es decir, que n no sea el cuadrado de un número natural), la cantidad total de divisores siempre será un número par. Recíprocamente, si $n = a^2$ para algún número natural a, esa forma de escribir n como producto de dos números (a y a en este caso) sólo aporta un divisor y todas las demás maneras de escribirlo como producto aportan dos divisores cada una, por lo que la cantidad total de divisores de un número que es el cuadrado de otro número natural es un número impar.

Con todo lo anterior, sólo nos resta saber cuántos números entre 1 y 2025 no son el cuadrado de otro número natural. Resulta más sencillo contar los que sí son el cuadrado de otro número, estos son los siguientes:

$$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ \dots,\ 45^2 = 2025$$

Por lo que sólo hay 45 números que son el cuadrado de otro. Los 1980 restantes tienen una cantidad par de divisores. Así que hay 1980 estudiantes que reciben una cantidad par de dulces.

■