Nivel Mayor (Soluciones)

Primera fecha

22 de noviembre 2025

La cisterna

Problema 1. *Considere la siguiente suma:*

$$2+5+8+\cdot+x$$

¿Cuál debe ser el valor de x para que la suma valga 155? ¿Cuánto debe ser el valor de x para que la suma valga 9640?

Solución.

Ambas preguntas pueden ser respondidas con un enfoque directo o con un enfoque más general.

Veamos cada parte con un enfoque diferente para ilustrar ambos métodos.

Sencillamente podemos ir sumando los términos uno a uno hasta llegar a 155 de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}2+5=7,\ 7+8=15,\ 15+11=26,\\ 26+14=40,\ 40+17=57,\ 57+20=77,\\ 77+23=100,\ 100+26=126,\ 126+29=155\end{gathered}$$

Por lo que x debe ser el último valor que se sumó, es decir, 29.

Para la segunda parte utilizaremos un enfoque más general, para ello notamos que estamos sumando todos los términos de la forma $3k-1$, con $k \geq 1$. Por la estructura de la suma, el último sumando se puede escribir como $3n-1$ para cierto n.

Si sumamos el primer y el último término, nos da $2+(3n-1)=3n+1$, el segundo término es 3 más que el primero y el penúltimo término es 3 menos que el último, así, al sumar el segundo y el penúltimo la suma también da $3n+1$, si continuamos con este proceso avanzando desde los primeros términos y retrocediendo desde el final, seguimos obteniendo sumas iguales a $3n+1$. Como agrupamos los términos de a pares, tenemos $\frac{n}{2}$ de estas sumas, con esto concluimos que la suma total es $\frac{n(3n+1)}{2}$. Como esto debe dar 9640, tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{n(3n+1)}{2}=2214 \Longrightarrow 3n^2+n-19280=0 \Longrightarrow (n-80)(3n+241)=0$$

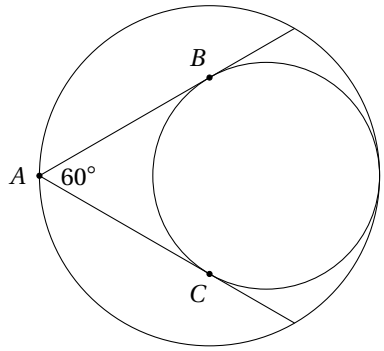
como $3n+241$ no puede ser igual a 0, concluímos que $n=80$ y, por ende, $x=3n-1=239$.

■

Problema 2. *En la figura, el área del círculo mayor es* $1cm^2$.

El círculo menor es tangente a la primera circunferencia y a los lados del ángulo inscrito que mide $60°$.

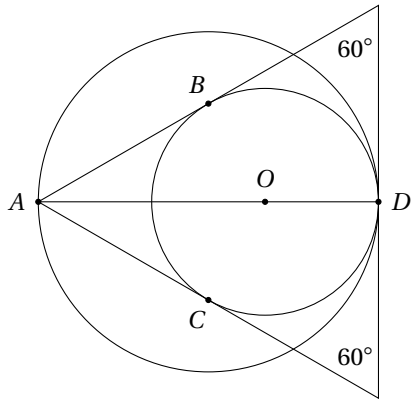
¿Cuál es el área del círculo menor?



Solución.

Fe de erratas: El problema, tal como está presentado tiene hipótesis insuficientes para calcular lo pedido. La solución mostrada a continuación supone la hipótesis adicional de que el punto A, el centro de la circunferencia pequeña y el punto de tangencia entre los dos círculos son colineales.

Sea D punto tangente del circulo con el circulo pequeño. Notemos que el pequeño circulo está inscrito en un triángulo equilátero. Esto es importante porque de aquí deducimos tres cosas simetría. primero, AD es diametro del circulo, el centro del pequeño circulo, O, pasa por AD y por último, AD es mediana del triángulo equilátero.



Notemos que O es centro de las medianas, por lo que separa a AD en un tercio, es decir, $AD : OD = 3 : 1$.

De esto último, notemos que AD es dos radios del circulo, $2R$, y OD es un radio del pequeño circulo, r.

Por lo tanto tenemos que $\frac{r}{2R} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{2R}{3}$.

Así, el área del círculo pequeño es $\pi r^2 = \pi(\frac{2R}{3})^2 = \frac{4}{9}\pi R^2$.

Solución Alternativa Notamos que $\triangle ACO$ es un 30°-90°-60°, por lo que $AO = 2r$. Luego, podemos seguir la demostración al igual que en la solución anterior.

■

Problema 3.

A Amanda le gusta mucho el teorema de Pitágoras, pero le da demasiada flojera hacer los cálculos con tanto número al cuadrado. Cansada de multiplicar tanto decidió inventar su propia fórmula para el teorema de Pitágoras que involucre menos cálculos. La fórmula de Amanda dice lo siguiente: Dado un triángulo rectángulo de catetos a, b y de hipotenusa c, entonces $a^2 = b + c$. Suponiendo que los 3 lados del triángulo son números naturales, demuestre que la fórmula de Amanda es cierta en el caso de que a sea un número primo.

Solución.

Como el triángulo es rectángulo, se cumple el teorema de Pitágoras usual, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$, al despejar a^2 y factorizar se obtiene lo siguiente:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

Como a es un número primo, las únicas formas de escribir a^2 como producto de dos números naturales son $a^2 \cdot 1$ y $a \cdot a$, esta última la descartamos, pues $c + b > c - b$. Concluímos entonces que se debe cumplir que $c - b = 1$ y $c + b = a^2$, lo cuál demuestra la validez de la fórmula de Amanda.

■