Torneo El Número de Oro 2017
Primera fecha - 30 de Septiembre

Equipo Académico

Nivel Menor

$\boxed{1}$ En el triángulo ABC se marca el punto D, en el lado BC, y el punto E, en el lado AC, de modo que $CD = DE = EB = BA$. El ángulo ACB mide 20^o.
Calcule el ángulo ADE.

$\boxed{2}$ Un número se dice *palíndromo* si se lee igual tanto de izquierda a derecha, como de derecha a izquierda. Por ejemplo, los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, \ldots, 101, 111, 202$ son palíndromos. Si se escriben ordenados en una lista todos los palíndromos comenzando desde 1, ¿cuál será el que ocupe la posición 2017?.

$\boxed{3}$ Demuestre que para cualquier entero $n > 1$, el número $1 + n^2 + n^4$ es siempre compuesto.

Nivel Mayor

$\boxed{1}$ Encontrar todos los números de la forma aa y de la forma $bbcc$ (donde a, b, c son dígitos), tales que se cumpla la igualdad:

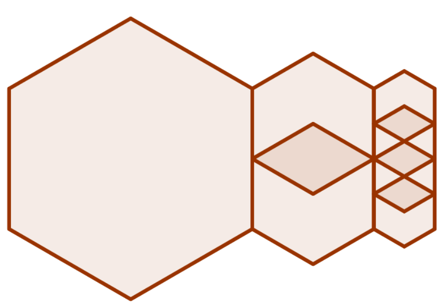
$$aa = \sqrt{bbcc}$$

$\boxed{2}$ En Linealandia hay $n \geq 1$ ciudades, situadas, de izquierda a derecha, a lo largo de un camino. Cada ciudad tiene un *bulldozer* izquierdo (puesto a la izquierda de la ciudad mirando hacia la izquierda) y un *bulldozer* derecho (puesto hacia la derecha y mirando hacia la derecha).

Los tamaños de todos los *bulldozers* son distintos. Cada vez que un *bulldozer* izquierdo se enfrenta con uno derecho, el más grande empuja al más pequeño fuera del camino. Por otro lado, los *bulldozers* están muy desprotegidos en su retaguardia; así que, si un *bulldozer* alcanza la parte trasera de otro, el primero empuja al segundo fuera, sin considerar sus tamaños.

Sean A y B dos ciudades, con B a la derecha de A. Decimos que A puede ***barrer*** a B si el *bulldozer* derecho de A puede llegar hasta B empujando fuera del camino todos los *bulldozer* que se encuentre. De la misma manera, la ciudad B puede ***barrer*** a A si el *bulldozer* izquierdo de B puede llegar hasta A empujando todo lo que halle en su camino.
Pruebe que existe exactamente una ciudad que no puede ser barrida.

$\boxed{3}$ Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ de lado a. Se toma el punto medio G del lado DE, y se construyen 2 hexágonos exteriores de lados $\frac{a}{2}$ usando DG y GE como lados. Luego, se repite este proceso (como muestra la figura). Si este proceso se hace 5 veces, ¿Cuál es la suma de las áreas en las que se superponen los hexágonos?



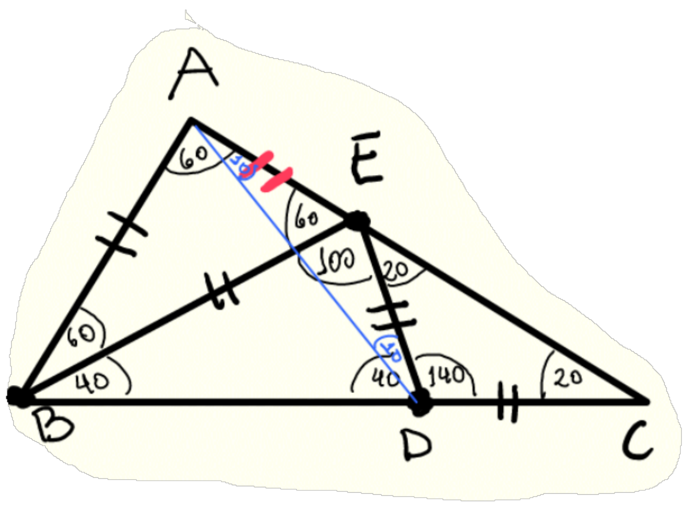
Torneo El Número de Oro 2017
Primera fecha - 30 de Septiembre

Equipo Académico

Soluciones

Nivel Menor

$\boxed{1}$ Se construye el triángulo pedido y se empieza a completar con ángulos. $\angle ECD = 20^o$ y ΔCDE



isósceles, luego, $\angle CED = 20^o \Rightarrow \angle EDC = 140^o \Rightarrow \angle BDE = 40^o$. Ya que ΔDEB es isósceles, $\angle EBD = 40^o \Rightarrow \angle DEB = 100^o$, luego, ya que A, E y C son colineales, $\angle AEB = 60^o$, pero ΔABE es isósceles $\Rightarrow \angle BAE = 60^o \Rightarrow \angle ABE = 60^o \Rightarrow \Delta AEB$ es equilátero.
Trazamos ahora el segmento AD, creando un triángulo ΔAED isósceles. Como $\angle AED = 160^o$, se tiene que $\angle EAD = \angle ADE = 10^o$.

$$\therefore \angle ADE = 10^o$$

$\boxed{2}$ Si contamos cuidadosamente, encontraremos que :

- Hay 9 palíndromos de 1 dígito { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
- Hay 9 palíndromos de 2 dígitos { 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 }
- Hay 90 palíndromos de 3 dígitos
- Hay 90 palíndromos de 4 dígitos
- Hay 900 palíndromos de 5 dígitos
- Hay 900 palíndromos de 6 dígitos

En resúmen, hay 1998 palíndromos hasta el 999999

El palíndromo 1001001 está en la posición 2000
...

el palíndromo 1009001 está en la posición 2008
el palíndromo 1010101 está en la posición 2009
...

el palíndromo 1018101 está en la posición 2017

$\boxed{3}$ Notar que:

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= n^4 + n^2 + 1 + n^2 - n^2 \\ &= n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 \\ &= (n^2 + 1)^2 - n^2 \\ &= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

La parte derecha siempre es mayor a 1 cuando $n > 1$. Como n es entero y $n > 1$, $n^2 > n$, por lo que la parte izquierda también es mayor a 1. Luego, $n^4 + n^2 + 1$ tiene dos factores enteros distintos de 1, por lo que es compuesto.

Torneo El Número de Oro 2017
Primera fecha - 30 de Septiembre

Equipo Académico

Nivel Mayor

$\boxed{1}$ Primero, notar que $bbcc = 100bb + cc = 11(100b + c)$. Como $aa = 11a$, el lado $bbcc$ debe ser divisible por 121. Luego, $100b + c$ debe ser divisible por 11. Esto significa que

$$\begin{aligned} 100b + c &= 11k \\ 99b + b + c &= 11k \\ b + c &= 11(k - 9b) \end{aligned}$$

De aquí se tienen 2 casos:

a) b + c = 0. Esto da como solución $a = b = c = 0$.

b) b + c = 11. Como b y c son dígitos, esto se separa en las siguientes opciones:

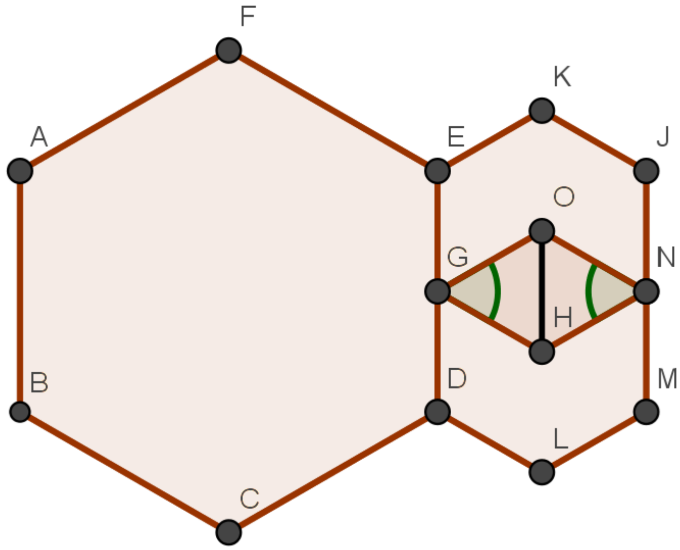
b	c	bbcc	Factorización
2	9	2299	$121 \cdot 19$
3	8	3388	$121 \cdot 28$
4	7	4477	$121 \cdot 37$
5	6	5566	$121 \cdot 46$
6	5	6655	$121 \cdot 55$
7	4	7744	$121 \cdot 64$
8	3	8833	$121 \cdot 73$
9	2	9922	$121 \cdot 82$

Luego, la única opción posible en este caso es $b = 7$ y $c = 4$, lo que al reemplazar da $a = 8$.

Por lo tanto, las soluciones son $\{0, 0, 0\}$ y $\{8, 7, 4\}$

$\boxed{2}$ Como en cada enfrentamiento de bulldozers, siempre sobrevive uno. Luego, siempre hay al menos un bulldozer que sobrevive (y por lo tanto, barre todo lo que está en su camino). Sin perder generalidad, digamos que es el bulldozer izquierdo de la ciudad A. Ahora, viendo el bulldozer derecho de A, si este bulldozer fuera sacado del camino por otro, entonces el bulldozer que lo sacó también sacaría al bulldozer izquierdo de A. Pero se sabe que el bulldozer izquierdo de A sobrevive, $\rightarrow\leftarrow$. Por lo tanto, el bulldozer derecho de A también sobrevive, lo que implica que también barre todo lo que está en su camino. Como ambos bulldozers de A barren todo lo que está en su camino, se concluye que solo una ciudad (A) sobrevive.

$\boxed{3}$ Notar que los triángulos GOH y ONH son equilateros (GO = ON = NH = HG ya que los 4 son lados de hexágonos regulares de lado $\frac{a}{2}$ y los ángulos marcados miden $60°$). Luego, el área en este caso es $2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{\sqrt{3}a}{8}$. Por homotecia, los rombos siguientes tienen área $\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. En general, el rombo de la repetición n tendrá área $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$. Para ver cuantas intersecciones se generan, notar que si se tienen n hexágonos, al tomar los puntos medios se generan $2n$ hexágonos, los que generan $2n - 1$



intersecciones. Como se tienen 2^{n-1} hexágonos en el paso n, la cantidad de intersecciones en el paso n es $2^n - 1$. Por lo tanto, el área pedida es:

$$\sum_{k=1}^{5} (2^k - 1) \cdot (\frac{1}{4})^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$$