Torneo El Número de Oro 2017
Segunda fecha - 14 de Octubre

Equipo Académico

Nivel Mayor

$\boxed{1}$ Se ubican los números del 1 al 9 en un cuadrado de 3×3, (no necesariamente en la secuencia $1, 2, 3, \ldots$), como en la figura:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Si cada fila se lee como un sólo número por ejemplo (abc) (representación decimal) y cada columna también, por ejemplo (adg), ¿Se puede lograr que la suma de los 6 números así obtenidos nos dé 2017?

$\boxed{2}$ Felipe y Nicolás juegan por turnos en un mapa formado por ciudades y caminos que conectan algunas de estas ciudades, de manera que ninguna ciudad queda aislada. En el primer turno, Nicolás pone su pieza de policía en alguna de las ciudades, y después Felipe pone su pieza de ladrón en otra ciudad. En los turnos siguientes, ambos jugadores mueven secuencialmente (Nicolás primero) sus piezas a otra ciudad conectada con la ciudad en la que está actualmente. Nicolás gana si logra colocar su pieza en la misma ciudad que la pieza de Felipe, y Felipe gana si jamás puede ser atrapado. Encuentre condiciones necesarias del mapa para que Nicolás tenga estrategia ganadora.

$\boxed{3}$ Sísifo y Hades juegan a un juego por turnos. En una escalera de n escalones, se tienen k piedras, 1 en cada uno de los primeros k escalones (de abajo hacia arriba). Sísifo en su turno puede subir una piedra al primer escalón arriba del actual **que esté desocupado**, y Hades en su turno puede bajar una piedra al escalón anterior, si está desocupado. Sísifo gana si logra tener una piedra en el último escalón al final de un turno de Hades. Si parte Sísifo, encuentre el mínimo de piedras que necesita Sísifo para ganar y describa la estrategia ganadora.

Soluciones

P1.- Notar que el número formado por las 6 sumas siempre será divisible por 9. En efecto, dividir la suma de los 6 numeros por 9 es equivalente a dividir $2(a+b+c+d+e+f+g+h+i)$ por 9. Como cada letra es un número entre 1 y 9, y sabiendo que no hay repeticiones, se concluye que es equivalente a dividir $2 \cdot 45$ por 9. Luego, todos los números formados por las 6 sumas deben ser múltiplos de 9. Como 2017 no es múltiplo de 9, se concluye que no puede cumplirse la igualdad.

P2.- Si el ladrón es atrapado, significa que en su turno, sin importar a donde vaya, el policía puede llegar a la misma ciudad. Diremos que la ciudad A domina a la ciudad B si cuando Nicolás tiene su pieza en A, Felipe tiene su pieza en B y le toca a Felipe, será atrapado en su próximo turno.

Notar que las ciudades dominadas no afectan sobre quien gana el juego. Si Nicolás gana en un mapa, entonces tiene una estrategia ganadora. Añadiendo una ciudad dominada B, basta extender la estrategia ganadora de la siguiente forma: Si el ladrón no está en B, entonces el policía puede usar la estrategia ganadora (que ya existe). Si el ladrón entra a B, basta que el policía se ponga en la ciudad que domina a B. Luego, sacar las ciudades dominadas no afecta al problema.

Como sacar las ciudades dominadas no afecta, se pueden remover las ciudades (y sus caminos correspondientes) hasta que no queden ciudades dominadas (como hay finitas ciudades, el proceso siempre acaba). Si el mapa se transforma en una sola ciudad, Nicolás gana. En caso contrario, Felipe siempre puede escapar.

P3.- Demostraremos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ es el mínimo.

Para ver que es el minimo, basta que para $2k+1$ escalones, $k+1$ piedras bastan, pero k piedras no lo hacen.

Para ver que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ piedras bastan, solo hay que ver el caso impar ($2k+1$ escalones) (Como $\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor$, si para el caso impar cumple entonces para el caso par claramente cumple).

Por inducción:

Caso base: $n = 3$. Luego, se tienen 2 piedras, en los escalones 1 y 2. Basta subir la piedra desde el escalón 1 hasta el escalón 3 para ver que Sísifo gana. ($n = 1$ es trivial).

Paso inductivo: Supongamos que para $2k-1$ escalones, bastan k piedras. Luego, para $2k+1$ escalones, subiendo la primera piedra, la acción única de Hades es bajar la piedra desde el escalón 2 hasta el escalón 1. Luego, sin contar los 2 primeros escalones, se tienen k piedras en los primeros k escalones de una escala con $2k-1$ escalones, que es nuestra hipótesis.

Por lo tanto, Sísifo puede ganar con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ piedras.

Para ver que no puede ganar con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ piedras, basta ver que con $2k$ escalones no puede ganar usando k piedras (Como $\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor$, si para el caso par no puede ganar, claramente con un escalón extra no podrá ganar).

Notar que en cada movimiento de Sísifo en el que avance un escalón (es decir, que la piedra superior esté en un escalón más arriba que al inicio del turno), en el turno de Hades, este puede separar un grupo de piedras en 2 grupos, con una distancia entre los grupos de 1 escalón. En efecto, el primer movimiento fragmenta las piedras en 2 grupos donde sea que se elija la piedra para avanzar, y desde el segundo movimiento, como en total se avanza un escalón, la piedra inicialmente tuvo que estar en el grupo superior, por lo que al bajar Hades una piedra se forman 2 grupos. Como entre la piedra en el escalón más alto (escalón k) y el final de la escalera hay k escalones, se deben formar k grupos de al menos una piedra. Como se tienen k piedras, se concluye que deben ser k grupos de 1 piedra. Como la distancia entre los grupos es de 1 escalón y la primera piedra está en el escalón 1, la última piedra está en el escalón $2k-1$. Luego, sin importar que piedra elija Sísifo, Hades puede bajarla y volver a este estado. Por lo tanto, es imposible que Sísifo gane con k piedras.

Como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ piedras sirven para ganar y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ no lo hacen, se concluye que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ es el mínimo de piedras para que Sísifo gane.